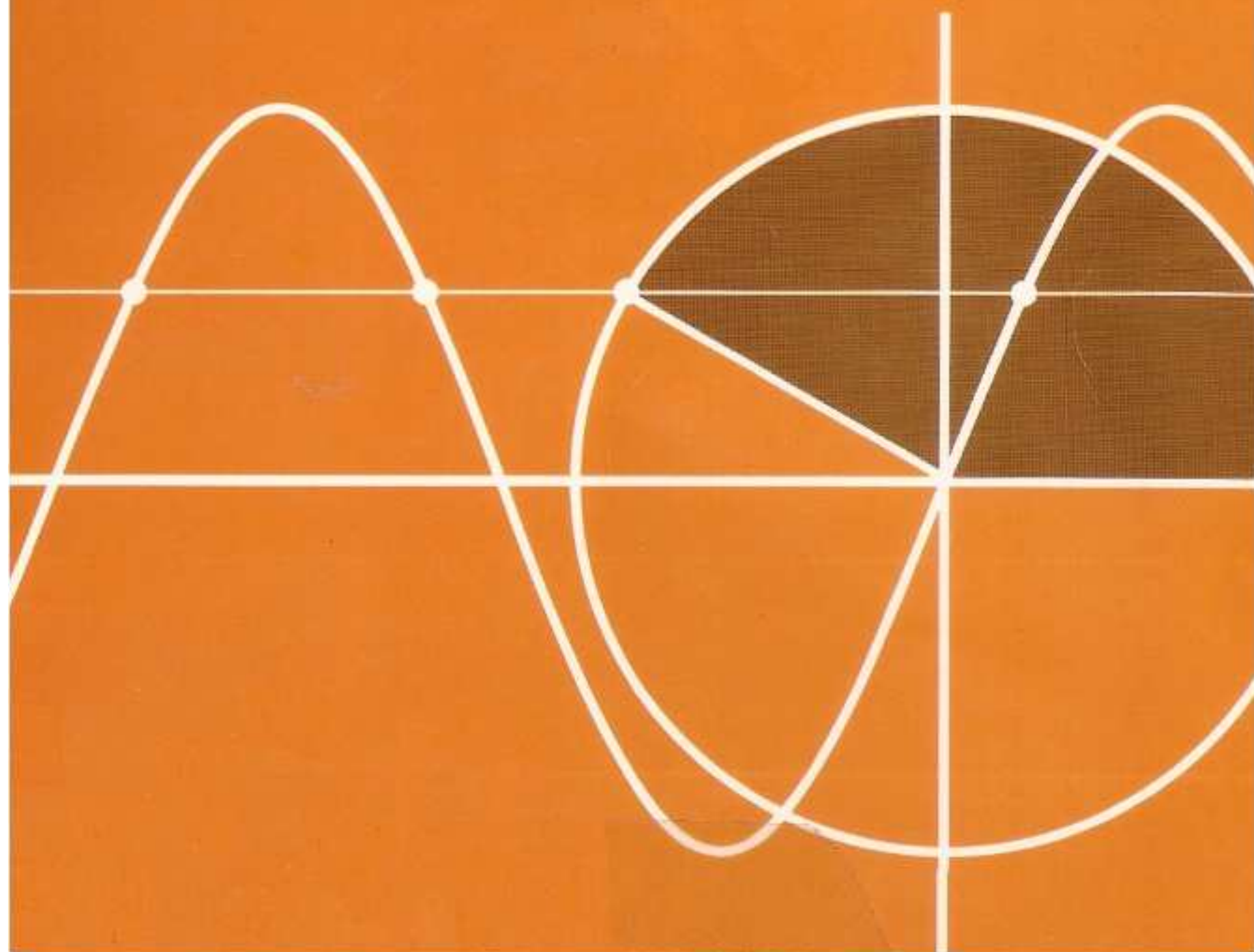
Trigonometria
Números Complexos

Manfredo Perdigão do Carmo
Augusto César Morgado
Eduardo Wagner

notas históricas de
João Bosco Pitombeira de Carvalho



Trigonometria
Números Complexos

Manfredo Perdigão do Carmo
Augusto Cesar Morgado
Eduardo Wagner

Com notas históricas de
João Bosco Pitombeira de Carvalho



Capa: Rodolfo Capeto

Diagramação e composição:
GRAFTEX Comunicação Visual
Tel. 274.9944, Rio de Janeiro.

Impressão:
Segrac (031) 462-7857

Prefácio

Este livro é uma adaptação de "Trigonometria e Números Complexos" escrito por um dos autores do presente texto. A mudança do título para Trigonometria–Números Complexos reflete o fato que aqui a Trigonometria é tratada de maneira independente dos Números Complexos, em oposição ao ponto de vista anterior, onde as fórmulas de adição das funções trigonométricas dependiam de propriedades dos números complexos. Embora a proposta inicial permaneça válida, achou-se que as condições atuais do ensino recomendavam a mudança adotada.

Um leitor interessado no ponto de vista inicial, poderá omitir o Capítulo 4, passar diretamente aos Capítulos 6 e 7 e voltar depois para o Capítulo 5.

Esperamos que essa nova versão possa ser util aos nossos colegas professores de Matemática e como sempre críticas e sugestões serão bem-vindas. Desejamos agradecer a Elon Lages Lima e Carlos Isnard pelas valiosas discussões nas várias etapas de preparação do texto.

Rio de Janeiro, janeiro de 1992.

Manfredo Perdigão do Carmo
Augusto Cesar Morgado
Eduardo Wagner

Conteúdo

1. Sistemas de Coordenadas no Plano

A idéia de representar pontos de um plano por meio de números é bastante antiga. Nos mapas mais grosseiros, um determinado lugar (onde foi enterrado um objeto, por exemplo) é caracterizado por um certo número de medidas (ver figura 1), feitas a partir de referências indicadas (rio, pedra, árvore etc.). A idéia de sistema de coordenadas em Matemática é um refinamento desse processo intuitivo.

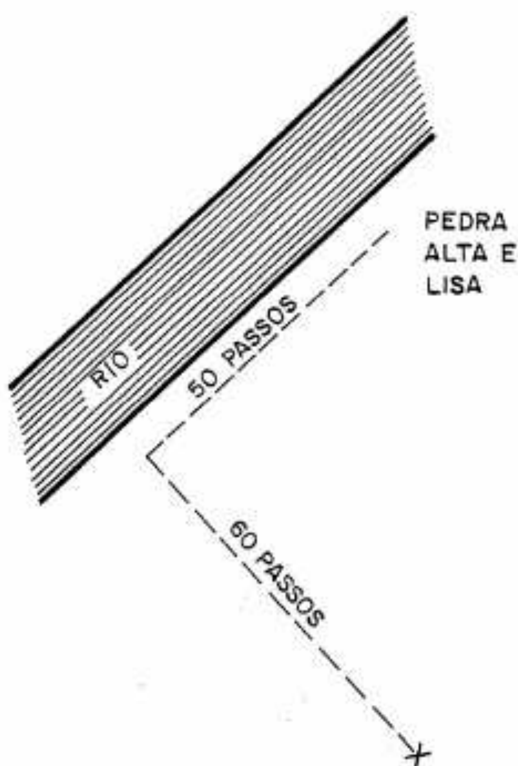


Figura 1

Primeiro, observamos que dada uma reta r, podemos representar os pontos desta reta por números reais, através da seguinte construção. Escolhe-se um ponto O da reta r, chamado origem, uma unidade de comprimento $\overline{O1}$ e um sentido positivo de percurso. Então, a cada ponto X da reta r, corresponde um número x, que é a *medida orientada* de OX, onde por medida orientada entendemos o comprimento de OX na unidade $O1$, associada, quando $X \neq O$, a um sinal positivo se o sentido de O para

X coincide com o sentido positivo (figura 2), e negativo caso contrário. Usaremos a notação $m(OX)$ para indicar a medida orientada de OX. É claro que quando $X = O$, $m(OX) = 0$.

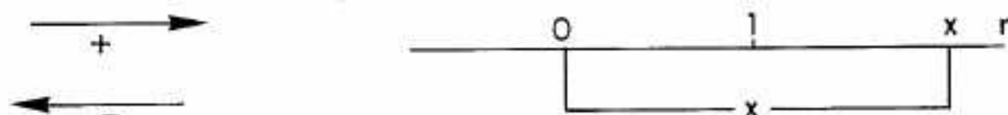


Figura 2

Desta maneira, cada ponto de r é representado por um único número real, chamado *coordenada* deste ponto. Reciprocamente, dado um número real x, obteremos um único ponto X de r, marcando a partir de O um segmento OX tal que $m(OX) = x$.

Na figura 3, indicamos as coordenadas de alguns pontos de r:

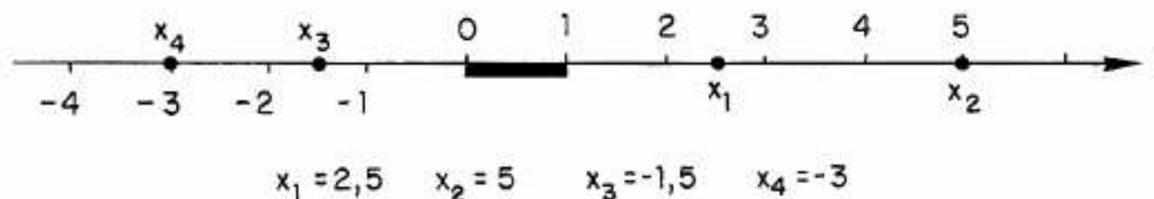


Figura 3

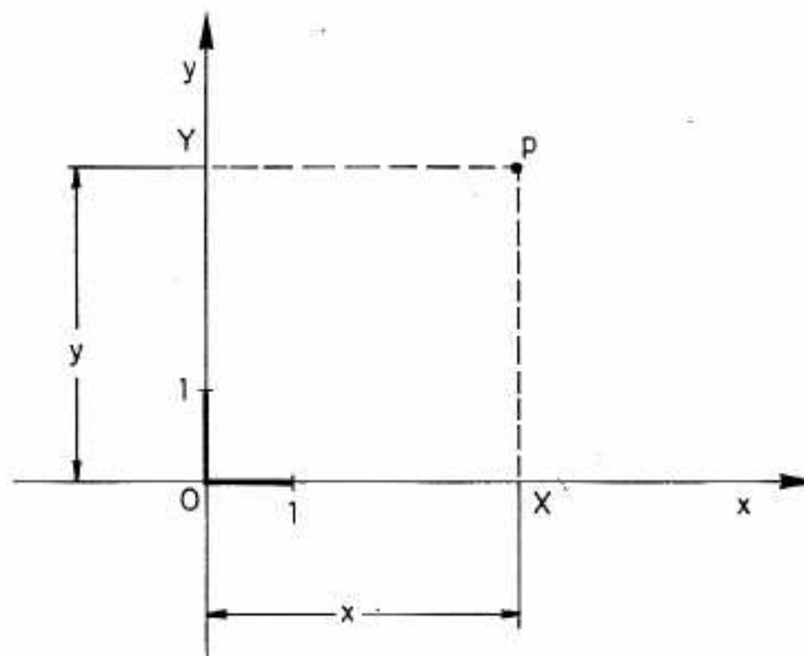


Figura 4

Uma representação análoga para os pontos de um plano P, obtém-se da maneira seguinte. Fixa-se em P um ponto O, chamado *origem*, e por O traçam-se duas retas x e y, perpendiculares, chamadas *eixos coordenados*.

Sobre estas retas escolhem-se unidades de medir comprimentos (em geral iguais) e sentidos de percursos, como no caso anterior. Por cada ponto p do plano P, traçam-se paralelas a y e x, que intersectam as retas x e y nos pontos X e Y, respectivamente. Os números x e y, dados por

$$x = m(OX), y = m(OY),$$

são chamados *coordenadas* de p no sistema xOy; é usual chamar x de *abscissa*, y de *ordenada* e o par (x, y) de *coordenadas* do ponto p (figura 4). O sistema xOy é chamado um *sistema retangular de coordenadas*.

Desta maneira, a cada ponto do plano P corresponde um único par ordenado de números reais (x, y) (ordenado quer dizer que (x, y) é diferente de (y, x), se $x \neq y$). Reciprocamente, dado um par (x, y) de números reais, obtém-se um único ponto p de P, intersecção das paralelas a y e x, passando por X e Y, respectivamente, onde $m(OX) = x$ e $m(OY) = y$.

Na figura 5, a seguir, representamos alguns pontos de um plano por meio de coordenadas. É conveniente chamar de *quadrante* cada uma das quatro regiões do plano determinadas pelas retas x e y; observe-se que em cada quadrante os sinais das coordenadas estão bem determinados. Os quadrantes são denominados 1º, 2º, 3º e 4º, de acordo com a figura 6.

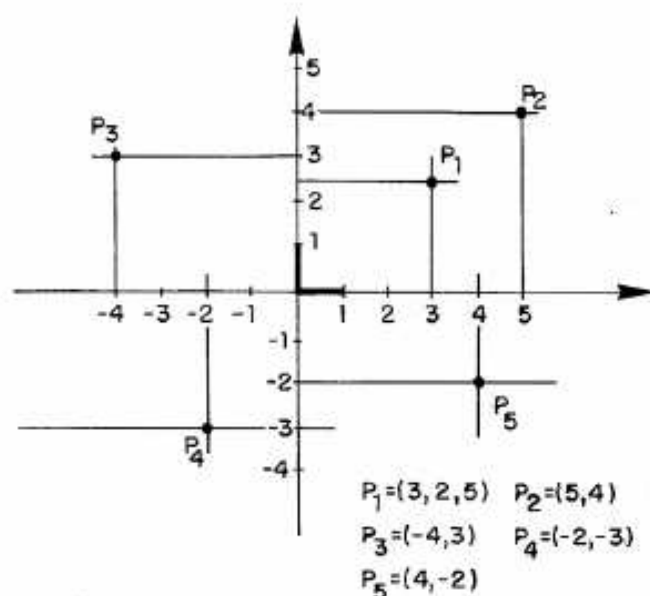


Figura 5

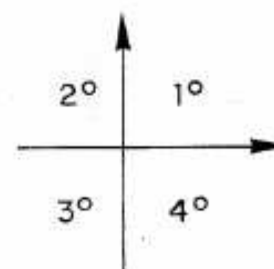


Figura 6

A idéia de representar pontos de um plano por pares de números é extremamente fértil. Por exemplo, consideremos o conjunto dos pontos de um plano que estão a uma distância fixa (digamos 1) de um ponto

fixo O do plano. Este conjunto constitui um círculo(*) S^1 de raio 1 e centro O, que será chamado um *círculo unitário* do plano. Escolhamos um sistema de coordenadas de origem O e uma unidade igual ao raio do círculo. Então, todo ponto de S^1 tem coordenadas (x, y), que pelo Teorema de Pitágoras (ver figura 7), satisfazem à relação:

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

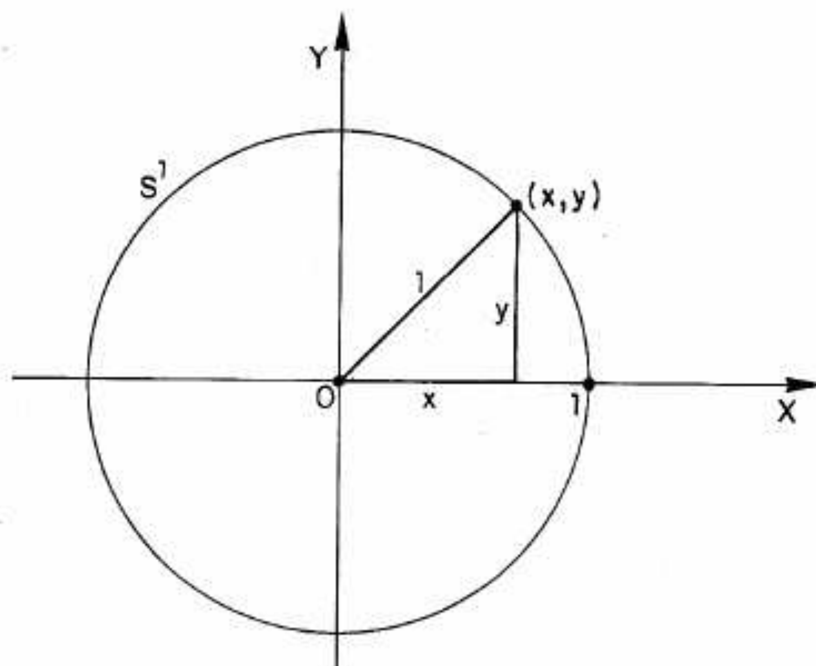


Figura 7

Reciprocamente, se as coordenadas (x, y) de um ponto qualquer P do plano satisfazem à relação (1), então, pelo Teorema de Pitágoras, a distância de P a O é igual a 1 e, portanto, p pertence a S^1.

Em outras palavras, do fato de representarmos os pontos de um plano por pares de números, decorre que podemos representar um círculo (conjunto de pontos) pela relação (1).

A idéia de representar figuras geométricas por relações entre coordenadas foi utilizada sistematicamente, pela primeira vez, por Descartes. Esta notável conseqüência da introdução de sistemas de coordenadas, fornece um método de estudo da Geometria em que as figuras são substituídas pelas relações que as representam. Este método, conhecido sob o nome de Geometria Analítica, não será desenvolvido aqui. A idéia básica de coordenadas é, entretanto, muito simples e pretendemos usá-la em restrições.

(*) usamos aqui círculo como sinônimo de circunferência

2. A trigonometria do triângulo retângulo

1. O ângulo

O ângulo é a figura formada por duas semi-retas de mesma origem. As semi-retas são os *lados* do ângulo e a origem comum é o seu *vértice*. Podemos representar um ângulo de várias maneiras. Se O é o vértice e se A e B são pontos quaisquer, um em cada lado, este ângulo será representado por $\widehat{AOB}$ ou $\widehat{BOA}$ (figura 8). Se utilizamos esta notação, a letra que designa o vértice deve aparecer entre as outras duas. Quando nenhum outro ângulo tem o mesmo vértice, podemos utilizar apenas a letra que designa este vértice e representá-lo apenas por $\widehat{O}$.

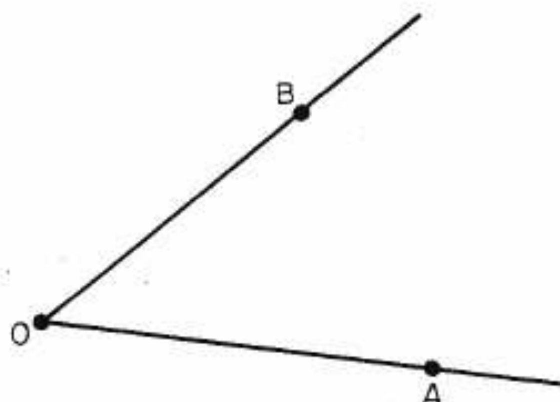


Figura 8

Para medir um ângulo, utilizamos o transferidor, que nada mais é que um círculo graduado em uma unidade qualquer.

A figura 9 mostra um transferidor graduado em graus. O *grau* é a fração de 1/360 do círculo e será a única unidade utilizada neste capítulo. Podemos observar no transferidor uma dupla escala. Porque este instrumento é feito assim? Pelo seguinte: Naturalmente, um círculo pode ser percorrido em dois sentidos. Quando escolhemos um deles, (que será chamado de positivo) dizemos que o círculo está *orientado*. Ocorre que os matemáticos têm preferência pela orientação no sentido anti-horário mas em outras atividades, como por exemplo, navegação aérea, o sentido

adotado é o oposto. A figura 10 mostra o transferidor medindo ângulos. Se a medida de um ângulo $\widehat{AOB}$ é θ, escrevemos simplesmente $\widehat{AOB} = \theta$.

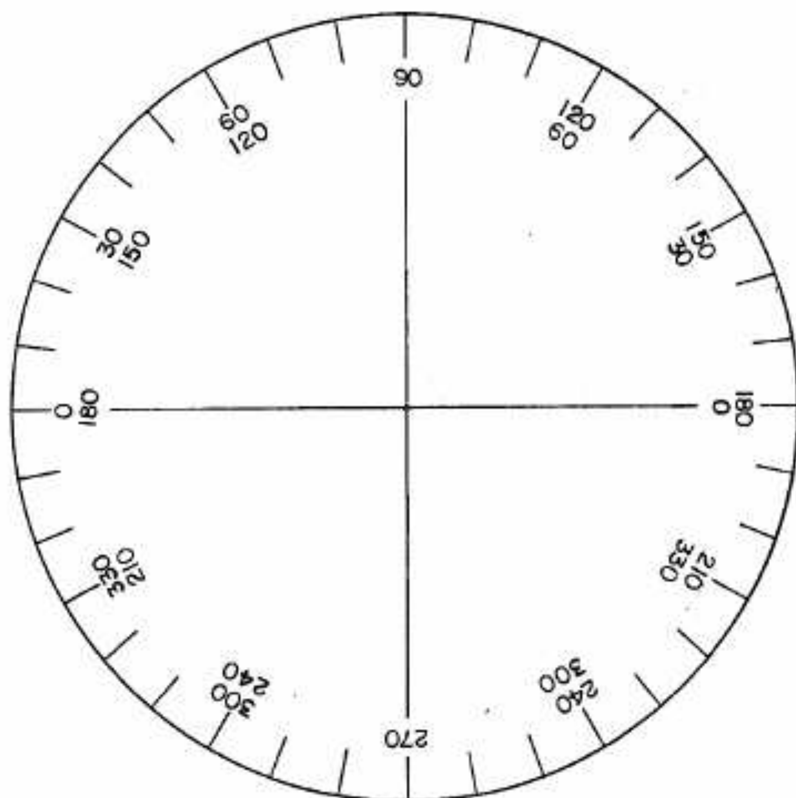


Figura 9

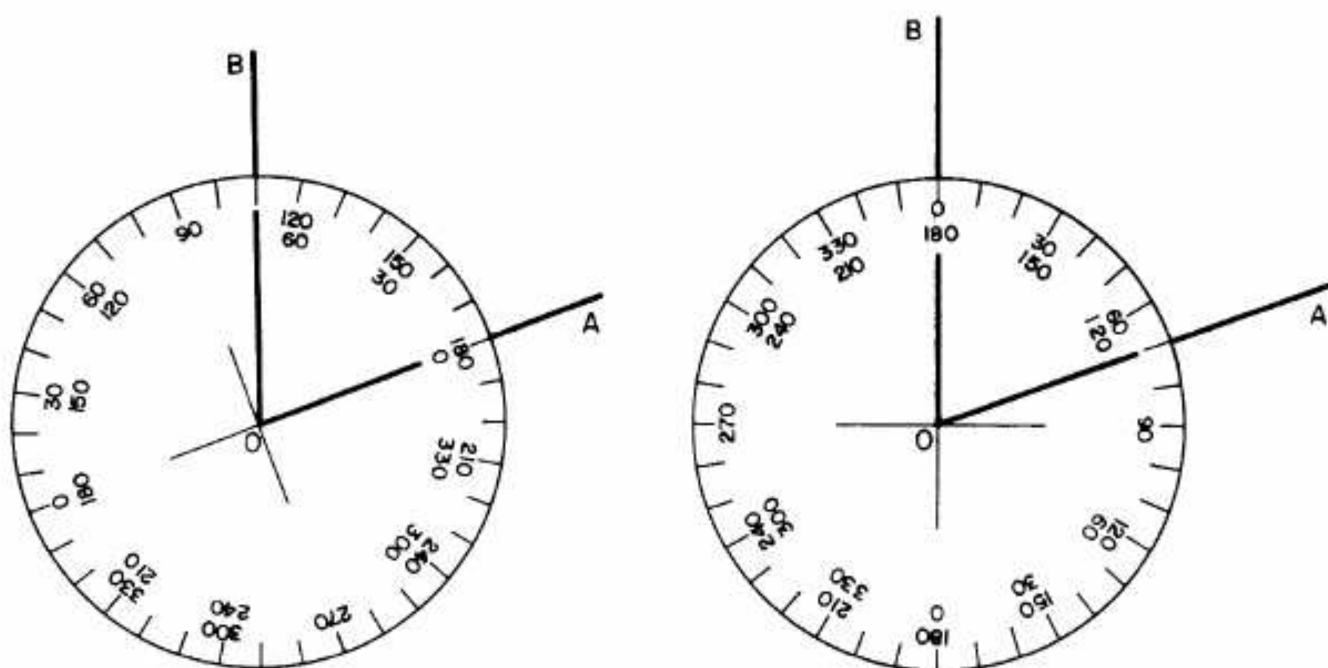


Figura 10. $\widehat{AOB} = 70°$

As medidas que mostramos, foram feitas com a escala colocada na região convexa do ângulo. É conveniente aqui, associar a cada ângulo uma segunda medida, obtida quando se coloca a escala na região não convexa, como mostra a figura 11.

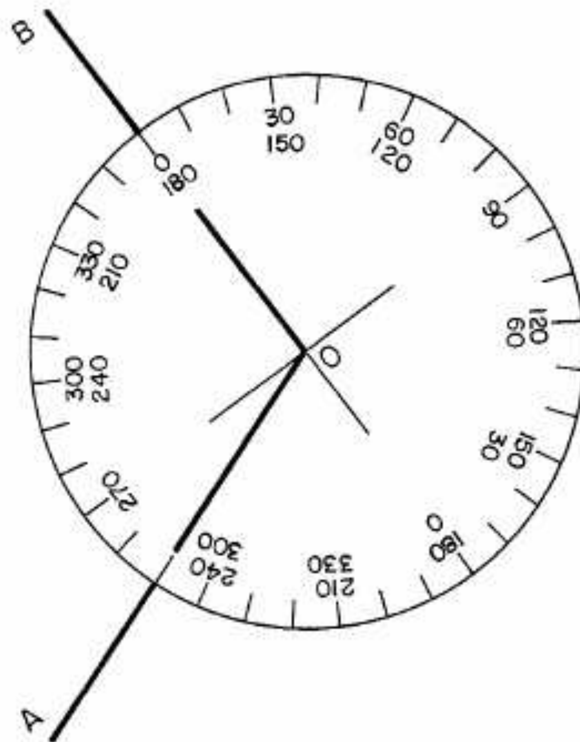


Figura 11. $\widehat{AOB} = 250°$

Para que, em cada situação, não existam dúvidas sobre que medida estamos considerando, adotaremos a seguinte convenção gráfica:

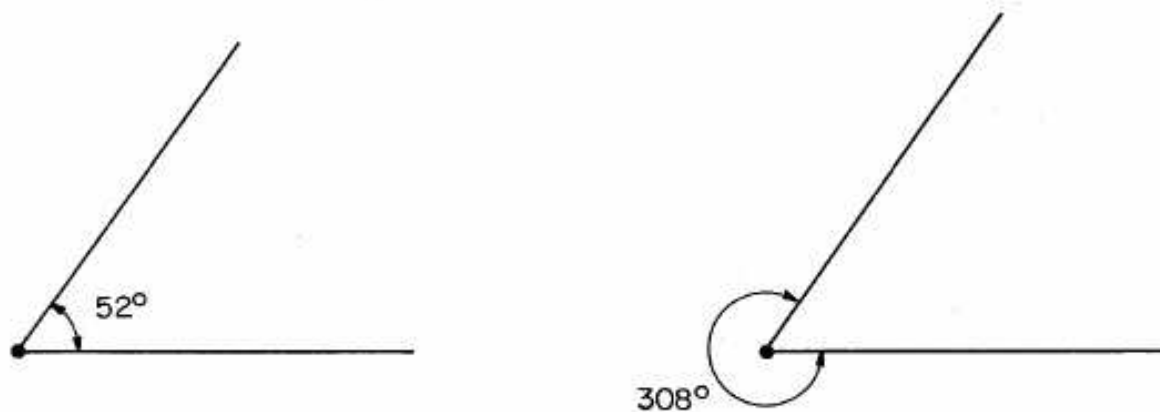


Figura 12. $52° + 308° = 360°$

Não entraremos em maiores detalhes sobre medida de ângulos. O leitor interessado poderá consultar o livro de Geometria de João Lucas M.

Barbosa [1] para um tratamento mais rigoroso do assunto.

2. As funções trigonométricas do ângulo agudo

Consideremos agora um ângulo $\widehat{AOB} = \theta, 0° < \theta < 90°$ e tracemos, a partir dos pontos A_1, A_2, A_3 etc., da semi-reta OA, perpendiculares A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 etc., à semi-reta OB. Os triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3 etc., são semelhantes por terem os mesmos ângulos (figura 13). Podemos portanto escrever:

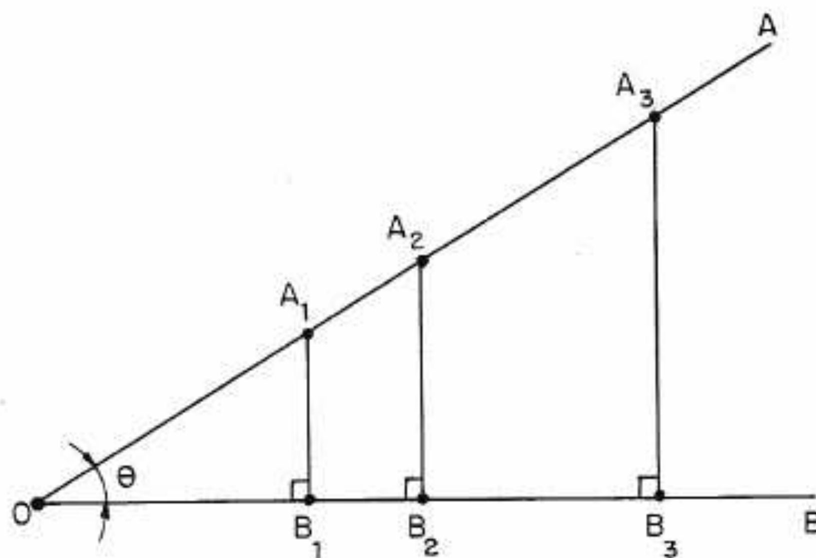


Figura 13

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots$$

Esta relação depende apenas do ângulo θ e não dos comprimentos envolvidos. Convém dar um nome a esta função de θ assim construída e *definir* para $0° < \theta < 90°$,

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \operatorname{sen}\theta$$

que se lê *seno de* θ. A vantagem desta idéia simples, porém engenhosa, é a seguinte. Usando triângulos pequenos, podemos construir uma tabela da função seno (em verdade, este não é o processo usado, mas para a ilustração da utilidade da função seno, basta saber que podemos dispor de uma tal tabela). Suponhamos agora que se quer medir o raio R da Terra,

um comprimento geralmente inacessível às medidas diretas. Um processo, usado desde os gregos, é o seguinte:

Sobe-se a uma torre de altura h e mede-se o ângulo θ que faz a reta BC do horizonte de B com a vertical BO do lugar. Pela figura 14, vê-se que

$$\frac{R}{R+h} = \operatorname{sen}\theta,$$

donde $R\operatorname{sen}\theta + h\operatorname{sen}\theta = R$, isto é,

$$R = \frac{h\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}$$

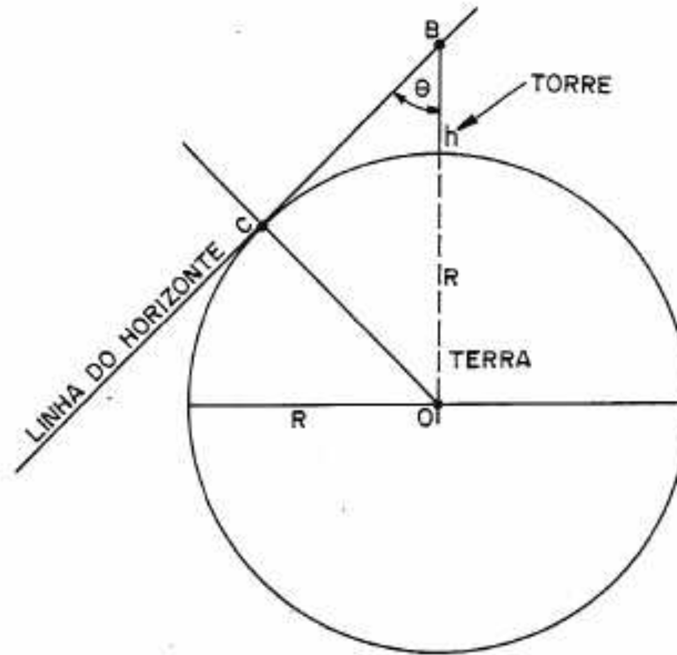


Figura 14

Se tivermos as medidas de h e θ (que são acessíveis) e uma tabela de senos, poderemos então calcular o raio da Terra R.

Voltando aos triângulos semelhantes da figura 13, vemos que as relações

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots$$
$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \cdots$$

também dependem apenas do ângulo θ. Definiremos então as funções,

para $0° < \theta < 90°$,

$$\cos\theta = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}$$

que se chamam *cosseno* de θ e *tangente* de θ, respectivamente.

Estas funções são chamadas *funções trigonométricas* e não são independentes. Duas relações aparecem naturalmente:

(1) $$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \ ^{(*)}$$

e

(2) $$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}.$$

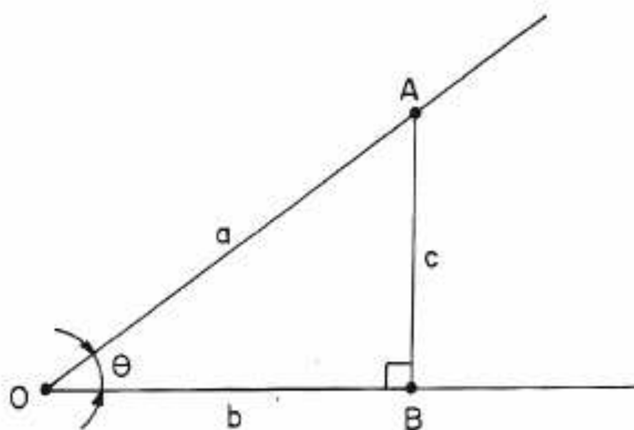


Figura 15

Para demonstrá-las, consideremos um ângulo θ de vértice O e um triângulo OAB, retângulo em B como mostra a figura 15. Fazendo, para facilitar, $\overline{OA} = a, \overline{OB} = b$ e $\overline{AB} = c$ e lembrando o Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, temos

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = (\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

e

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{b/a}{c/a} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\theta.$$

(*) $\operatorname{sen}^2\theta$ significa $(\operatorname{sen}\theta)^2$. A fórmula (1) será chamada de relação fundamental.

Como $\operatorname{sen}\theta, \cos\theta$ e $\operatorname{tg}\theta$ são números positivos, vemos ainda que se uma dessas funções de θ for conhecida, podemos calcular as outras duas. Ainda, se um triângulo retângulo tem um ângulo θ e hipotenusa de comprimento a, então os catetos desse triângulo medem $a \cdot \operatorname{sen}\theta$ (o cateto oposto a θ) e $a \cdot \cos\theta$ (o cateto adjacente a θ) como na figura 16.

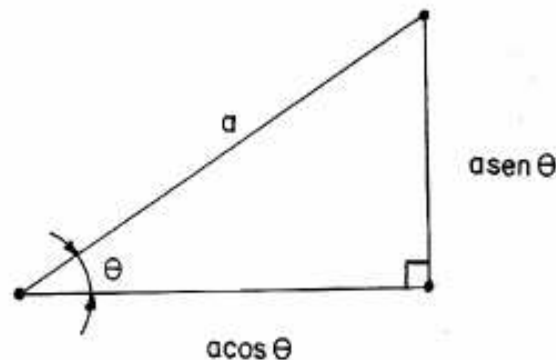


Figura 16

Não temos ainda uma forma de calcular $\operatorname{sen}\theta$ para um dado ângulo agudo θ. As proposições que se seguem, preparam o terreno para que se possa organizar uma primeira tabela de senos.

Proposição 1. *Se dois ângulos α e β são complementares $(\alpha + \beta = 90°)$, então $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ (o cosseno de um ângulo é o seno do ângulo complementar) e $\operatorname{tg}\alpha = 1/\operatorname{tg}\beta$.*

Aplicando as definições no triângulo da figura 17 temos

$$\operatorname{sen}\alpha = b/a = \cos\beta \text{ e}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = b/c = \frac{1}{c/b} = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

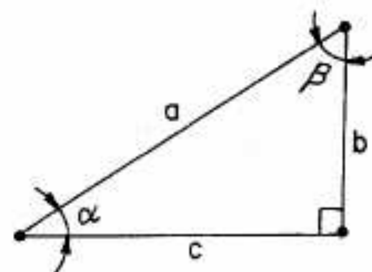


Figura 17

Se conseguirmos calcular as funções trigonométricas de ângulos do intervalo $(0°, 45°)$, passamos a conhecer imediatamente as funções dos

ângulos complementares, que estão no intervalo $(45°, 90°)$ e vice versa. Nosso próximo objetivo é mostrar que se θ é um ângulo do intervalo $(0°, 45°)$ cujas funções são conhecidas, poderemos calcular as funções dos ângulos 2θ e $\theta/2$. Com isto, a partir das funções de um ângulo, poderemos calcular as de muitos outros. Por exemplo, com as funções de $18°$, podemos obter as de $72° = 90° - 18°$, $9° = 18°/2$, $36° = 2 \cdot 18°$, $54° = 90° - 36°$ etc...

Proposição 2.

a) *Se* $\theta \in (0°, 45°)$ *então* $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta$;

b) *Se* $\theta \in (0°, 90°)$ *então* $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$.

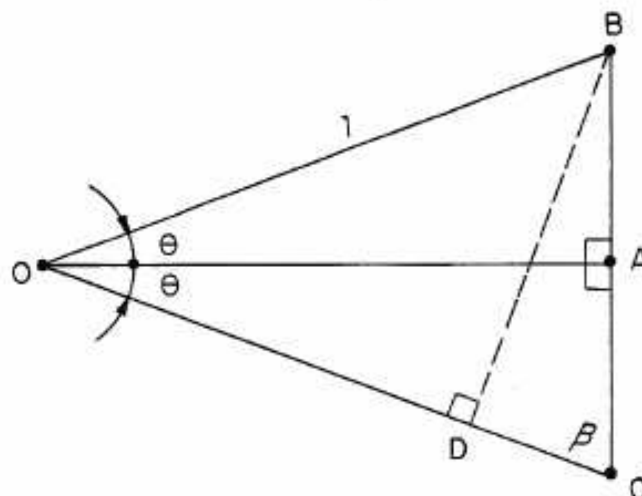


Figura 18

As demonstrações usam a figura 18, formada por dois triângulos OAB e OAC, retângulos em A, iguais, tais que $\overline{OB} = \overline{OC} = 1$ e $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \theta$. Nestas condições, temos $\overline{AB} = \overline{AC} = \operatorname{sen}\theta$ e $\overline{OA} = \cos\theta$. Traçando BD perpendicular a OC temos ainda $\overline{BD} = \operatorname{sen} 2\theta$. Ora, o dobro da área do triângulo OBC é igual a $\overline{BC} \cdot \overline{OA}$ e também igual a $\overline{OC} \cdot \overline{BD}$. Portanto,

$$2 \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta = 1 \cdot \operatorname{sen} 2\theta$$

o que demonstra a primeira parte da proposição.

Para demonstrar a segunda parte, observemos que $\overline{OD} + \overline{DC} = 1$, ou $1 \cdot \cos 2\theta + \overline{BC} \cdot \cos\beta = 1$. Como $\overline{BC} = 2 \cdot \operatorname{sen}\theta$ e $\cos\beta = \operatorname{sen}\theta$ (θ

e β são complementares), temos

$$\cos 2\theta + 2 \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} \theta = 1$$

ou ainda,

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}.$$

Substituindo 2θ por θ e conseqüentemente θ por $\theta/2$, obtemos a relação procurada.

Vamos agora calcular as funções trigonométricas de alguns ângulos. Uma primeira tabela de senos poderá ser obtida com os próximos resultados e com uma nova relação, que se encontra no exercício 28.

Funções trigonométricas de alguns ângulos

a) 30° e 60°

No triângulo equilátero ABC de lado 1 da figura 19 traçamos a altura AD (que também é mediana). Obtemos então $\overline{DC} = 1/2$ e pelo Teorema de Pitágoras $\overline{AD} = \sqrt{3}/2$. Como $\widehat{ACD} = 60°$ e $\widehat{DAC} = 30°$, temos

$$\operatorname{sen} 30° = 1/2, \quad \cos 30° = \sqrt{3}/2 \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 30° = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{3}/3,$$

$$\operatorname{sen} 60° = \sqrt{3}/2, \quad \cos 60° = 1/2 \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}.$$

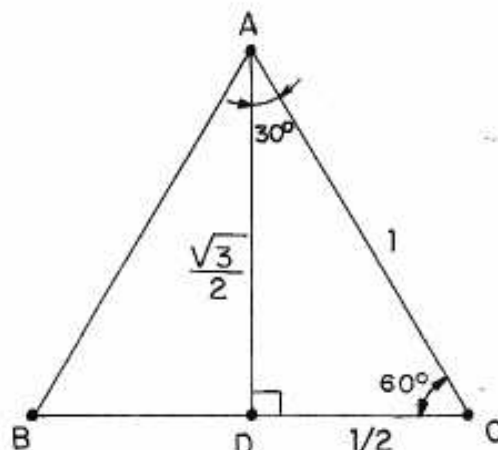


Figura 19

b) 45°

O triângulo ABC da figura 20 tem catetos iguais a 1 e ângulos agudos de 45°. Como $\overline{BC} = \sqrt{2}$ (Pitágoras), temos que

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 \text{ e } \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

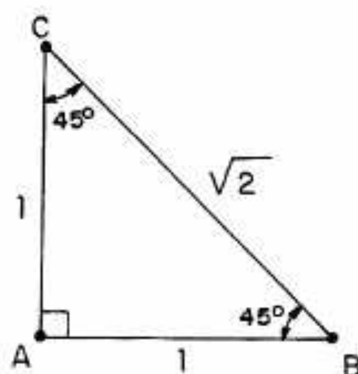


Figura 20

c) 18°

Precisaremos agora de um pouco mais de trabalho. A figura 21 mostra um triângulo ABC com $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ e $\widehat{BAC} = 36^\circ$. Traçando a bissetriz CD de $\widehat{ACB}$ podemos calcular todos os ângulos da figura. Como os triângulos BCD e CDA são isósceles, fazemos $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = x$ e como os triângulos CDB e ABC são semelhantes temos

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$$

ou

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$$

o que dá

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Traçando a altura AH do triângulo ABC (figura 22) temos $\operatorname{sen} 18^\circ = \overline{HB}/\overline{AB} = \frac{x}{2}$ ou seja,

$$\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

e pela relação $\operatorname{sen}^2 18° + \cos^2 18° = 1$,

$$\cos 18° = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

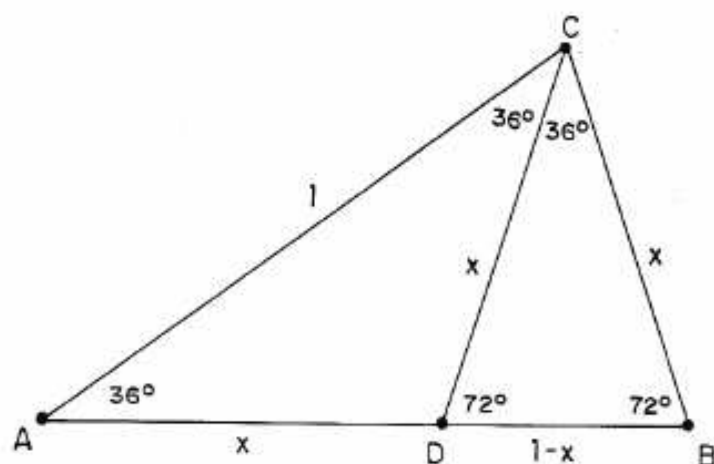


Figura 21

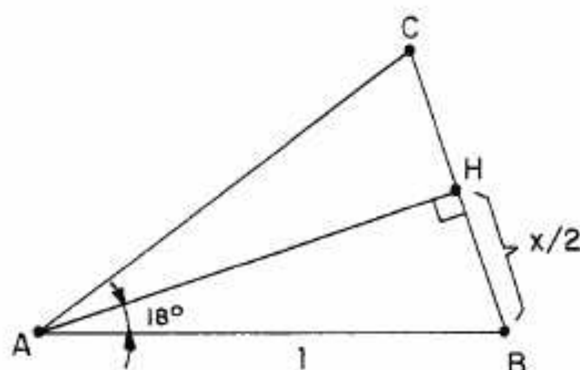


Figura 22

Observe que os resultados são respectivamente cosseno e seno de 72°, e com eles podemos calcular as funções de 36° e de 9° pelas relações da Proposição 2.

Exercícios

1. Para medir ângulos menores que um grau, são utilizadas duas subunidades, definidas da seguinte forma:

minuto: $1' = \frac{1°}{60}$

segundo: $1'' = \frac{1'}{60}$.

Neste sistema (sexagesimal), se um ângulo é igual, por exemplo, a 12 graus mais 35 minutos mais 42 segundos, escrevemos sua medida como $12°35'42''$. Efetue as operações:

a) $34°44'32'' + 17°29'51''$
b) $64° - 22°10'40''$
c) $5°40'32'' \times 5$
d) $26°43'12'' \div 3$

2. Um piloto decola de certa cidade A com seu avião, devendo alcançar a cidade B após duas horas de vôo na rota 28° (v. bússola). Porém, duas horas após a decolagem, o piloto notou que, por engano, tinha tomado a rota 280°. Supondo que o avião tenha combustível suficiente, qual deverá ser o novo rumo para que ele consiga atingir a cidade B?

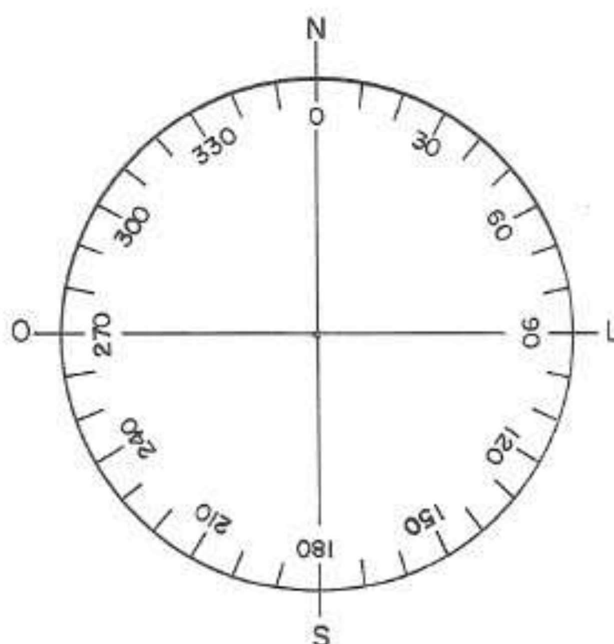


Figura 23

3. Um navegante solitário deseja sair em noite escura do ponto A e chegar ao ponto B da carta náutica da figura 24 ainda à noite. Ele conhece a velocidade do seu barco, $12km/h$ e possui, além desta carta, um relógio e uma bússola. Sabendo que nesta carta $1km = 2cm$ faça o planejamento de uma rota (poligonal) que ele possa seguir.

4. Sabendo que $\operatorname{sen}\theta = 0,6$, $0° < \theta < 90°$, calcule $\cos\theta$ e $\operatorname{tg}\theta$.

5. Mostre que:

a) $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\theta}$.

b) $\operatorname{sen}^2 \theta = \dfrac{\operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}$.

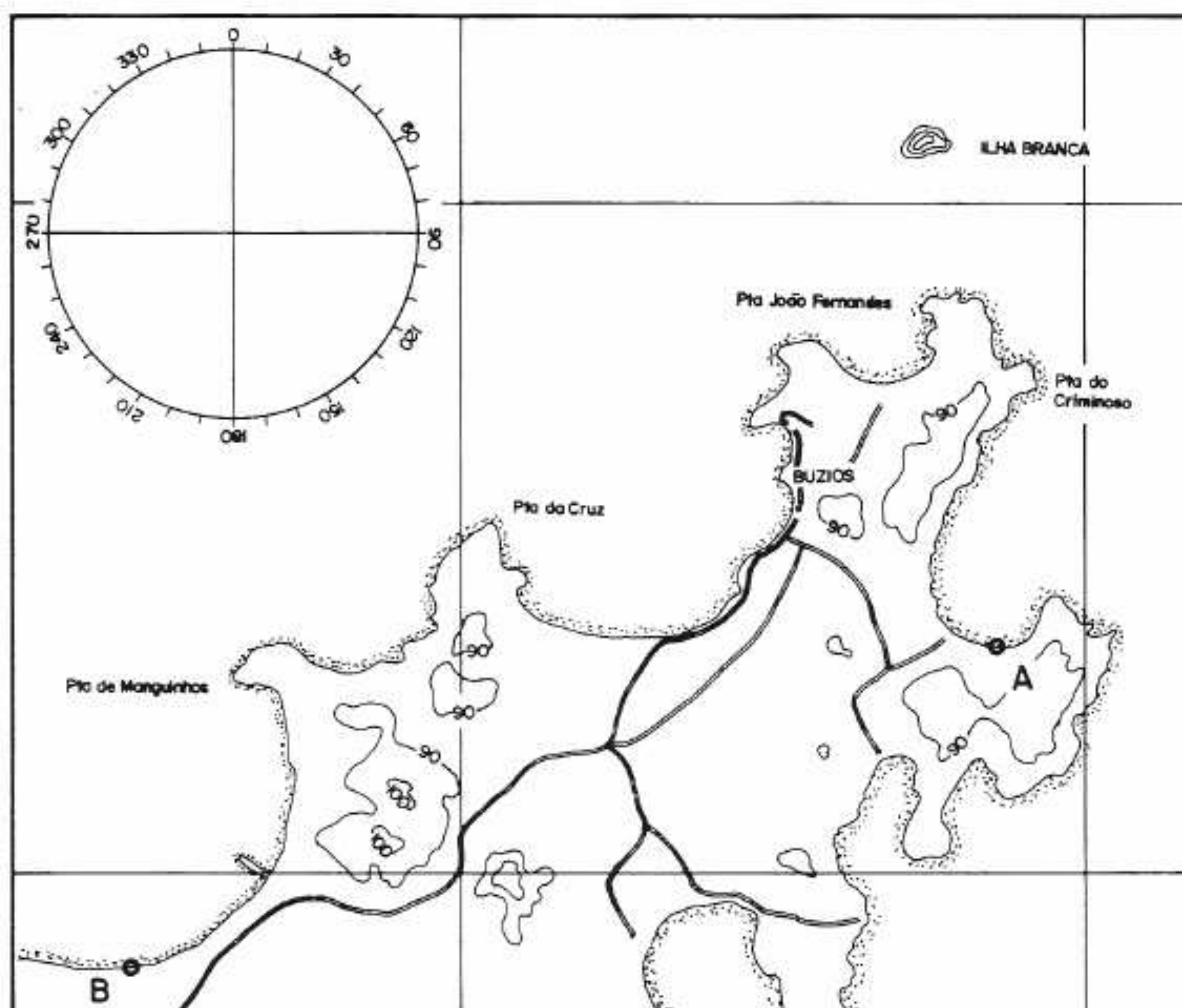


Figura 24

6. Sabendo que $\operatorname{tg}\theta = 5$, $0° < \theta < 90°$, calcule $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$.

7. O topo B de uma torre vertical AB é visto de um ponto C do solo sob um ângulo de 30° (figura 25). A distância de C à base da torre é $100m$. Calcular a altura da torre.

8. Para medir a largura de um rio de margens paralelas sem atravessá-lo, um observador no ponto A visa um ponto fixo B na margem oposta (suponha que AB é perpendicular às margens). De A, ele traça uma perpendicular à linha AB e marca sobre ela um ponto C, distando $30m$ de A (figura 26). Em seguida ele se desloca para C, visa os pontos B e A, e mede o ângulo $\widehat{BCA} = 70°$. Sabendo que a distância, sobre AB, de

A à margem M do rio é de $3m$ e que $\operatorname{tg} 70° = 2,75$, calcular a largura do rio (figura 26).

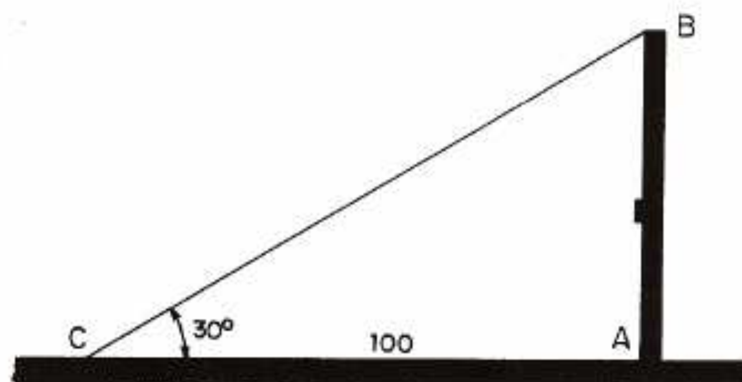


Figura 25

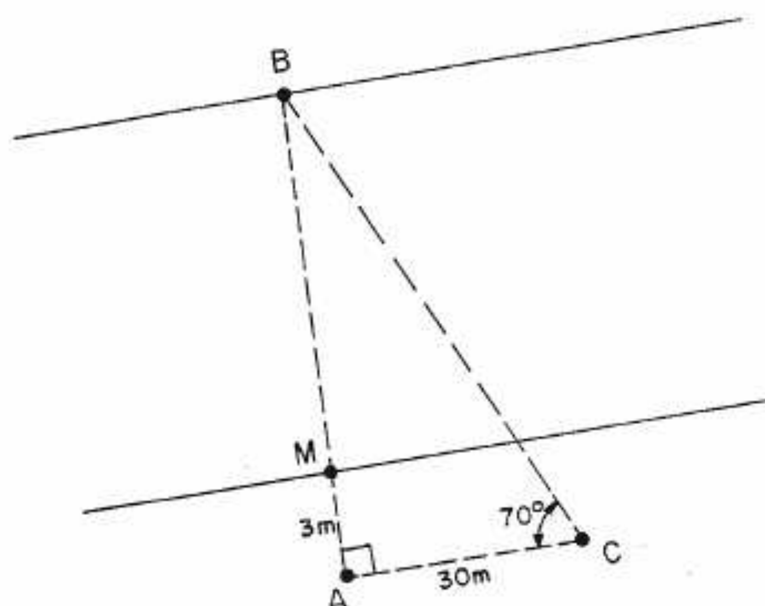


Figura 26

9. Se o observador do Problema 8 tivesse esquecido sua tabela de funções trigonométricas, ele poderia obter um valor aproximado para $\operatorname{tg} 70°$, desenhando um triângulo retângulo tal que um dos ângulos fosse $70°$, e medindo os seus lados. Faça isso e confira com o valor acima.

10. Com régua graduada e compasso

a) Construa um ângulo agudo cujo seno é $0,76$.
b) Construa um ângulo agudo cujo cosseno é $1/3$.
c) Construa um ângulo agudo cuja tangente é $3,2$.

11. Um observador em uma planície vê ao longe uma montanha segundo um ângulo de 15° (ângulo no plano vertical formado por um ponto no topo da montanha, o observador e o plano horizontal). Após caminhar uma distância d em direção à montanha, ele passa a vê-la segundo um ângulo de 30°. Qual é a altura da montanha?

12. Considere agora que o observador do problema 11 encontrou um ângulo α na primeira medição e β na segunda medição. Determinar a altura da montanha em função de α, β e d.

13. a) Os lados de um triângulo retângulo estão em progressão aritmética. Qual é o cosseno do maior ângulo agudo?

b) Os lados de um triângulo retângulo estão em progressão geométrica. Qual é o cosseno do maior ângulo agudo?

14. Um triângulo retângulo tem hipotenusa 1 e perímetro $\frac{\sqrt{6}+2}{2}$. Qual é a medida do menor de seus ângulos?

15. Considere a seqüência de segmentos $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots$ como na figura 27, onde cada segmento é perpendicular a um lado do ângulo $\widehat{O}$. Sabendo que $\overline{A_0A_1} = a$ e $\widehat{O} = \alpha$, determine o comprimento de A_nA_{n+1}.

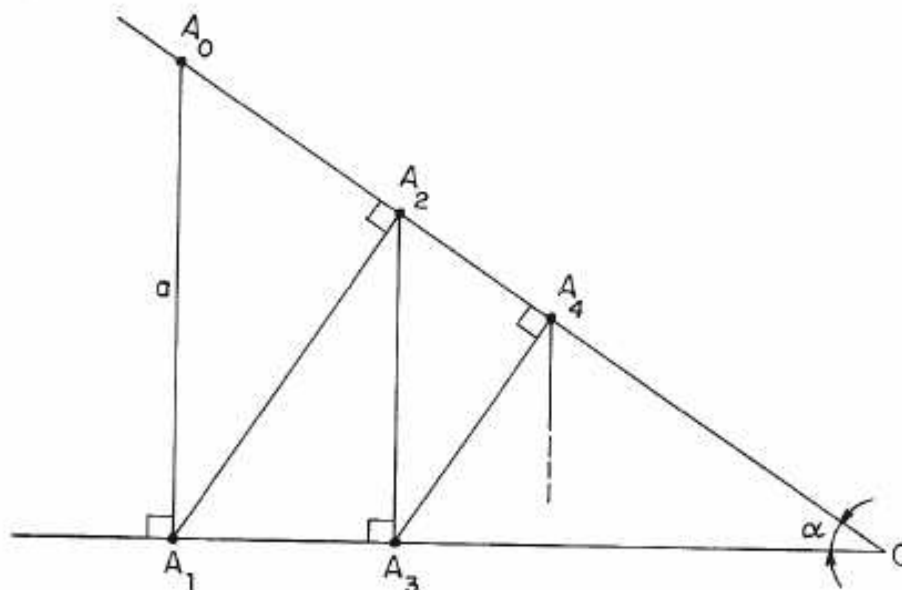


Figura 27

16. Construir com régua e compasso um triângulo retângulo conhecendo a hipotenusa e a soma dos catetos.

17. Determine, usando argumentos geométricos, o valor máximo de $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$.

18. A diagonal de um paralelepípedo retângulo forma com as três arestas concorrentes ângulos α, β e γ. Determine uma relação entre os cossenos desses ângulos.

19. a) Use a figura 28 para provar que

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$$

b) Calcule as funções trigonométricas de 15°.

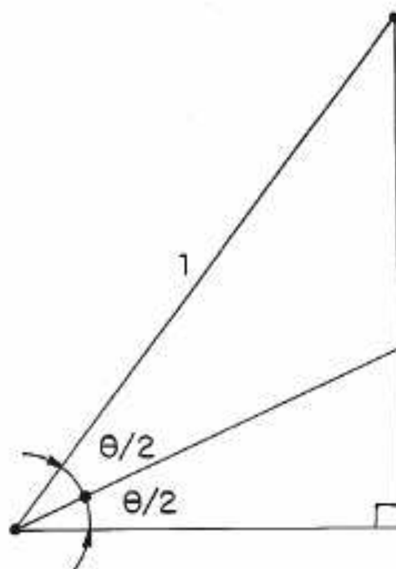


Figura 28

20. Fazendo $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$, e usando a relação do exercício anterior prove que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{2t}{1-t^2}.$$

21. Sabendo que $\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta = 0{,}4$, $0° < \theta < 90°$, calcule $\operatorname{tg}\theta$.

22. Sabendo que $\operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{tg}\theta = 0{,}45$, $0° < \theta < 90°$, calcule $\cos\theta$.

23. Dois observadores A e B estão na beira de um rio de margens paralelas e conseguem ver uma pedra P na outra margem. Com seus teodolitos eles medem os ângulos $P\hat{A}B = \alpha$ e $P\hat{B}A = \beta$. Sabendo que $\overline{AB} = 120m$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$ e $\operatorname{tg}\beta = 3$, determine a largura do rio.

24. Para prolongar uma estrada reta r deve-se perfurar um túnel em um morro. É conveniente que duas equipes trabalhem simultaneamente nos pontos de entrada E e de saída S do túnel. Descrever um processo pelo qual, sem sair do plano do terreno, é possível marcar o ponto S e a direção r de saída (admita que, com exceção do morro, o terreno é plano).

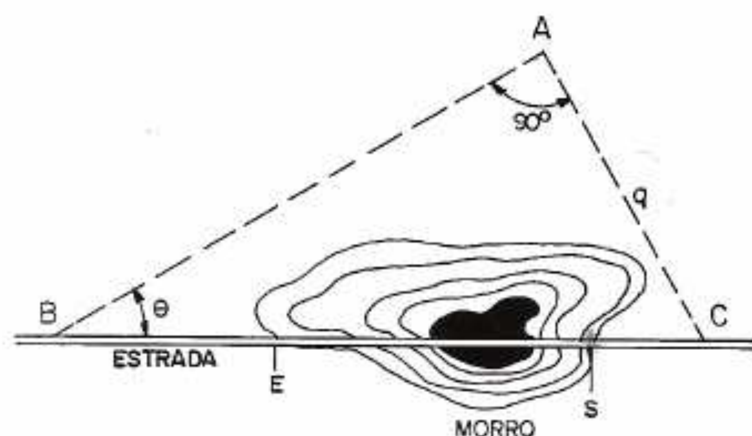


Figura 29

25. Um ponto A dista $5cm$ de um círculo de $3cm$ de raio. São traçadas as tangentes AB e AC ao círculo. Calcule o seno do ângulo $B\hat{A}C$.

26) Calcule seno e cosseno de 36°.

27. Um astronauta em órbita vê uma fração da superfície da Terra chamada *calota esférica*. O diâmetro desta calota é visto pelo observador segundo um ângulo 2θ. Determine em função de θ e do raio R da Terra, a área da superfície do planeta vista pelo astronauta. (A área de uma calota esférica é dada por $A = 2\pi Rh$ onde R é o raio da esfera e h é a altura da calota.)

28. Use as figuras 30a e 30b para deduzir as fórmulas

a) $\text{sen}(a + b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a$

b) $\text{sen}(a - b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b - \text{sen}\, b \cdot \cos a$

29. Calcule seno e cosseno de 6° e indique um processo para obter uma tabela de senos de 3 em 3 graus.

30. Aristarco de Samos observou que quando a Lua está exatamente meio cheia, o ângulo Lua-Terra-Sol mede aproximadamente 87° (v. figura abaixo). Mostre que esta observação implicaria que a distância da Terra

ao sol é mais que 18 vezes e menos que 20 vezes a distância da terra à lua. (Aristarco cometeu um compreensível erro de observação. O ângulo $\widehat{LTS}$ mede aproximadamente $89°51'$ e a distância da Terra ao sol é cerca de 400 vezes a distância da Terra à Lua.)

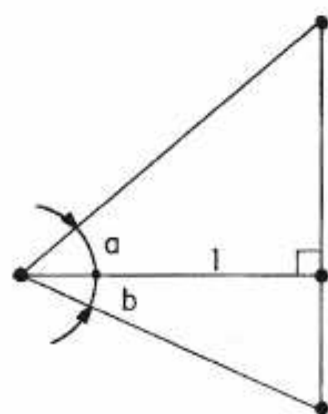


Figura 30a

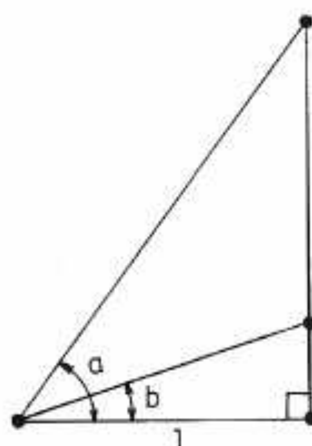


Figura 30b

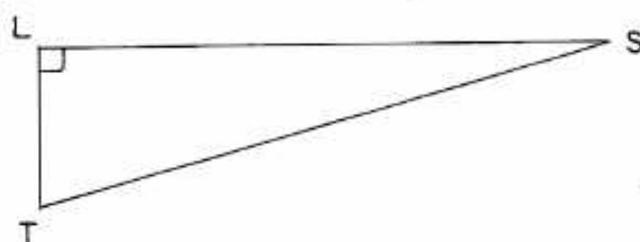


Figura 31

3. Extensões das funções trigonométricas

1. Introdução

O comprimento de um segmento está bem definido nos livros de Geometria (ver, por exemplo [**2**] cap. 1). Porém, o comprimento de uma curva não tem definição fácil. Ajustar sobre uma curva um arame e depois esticá-lo dá uma boa noção intuitiva do que seja o comprimento dessa curva, mas naturalmente, não serve como definição. Para o círculo em particular, dizemos que o seu comprimento C é o número real cujas aproximações por falta são os perímetros dos polígonos convexos nele inscritos. Não entraremos aqui nos detalhes desta definição. O leitor interessado poderá consultar [**1**] pág. 153. Diremos apenas que todo círculo tem um comprimento C, e admitiremos que

"*o número* π *é o comprimento de um semi-círculo de raio* 1".

Desta forma, no círculo de raio 1, $C = 2\pi$ e conseqüentemente, no círculo de raio $R, C = 2\pi R$ porque dois círculos quaisquer são semelhantes. (Veja [**2**], pág. 47 para a demonstração desta afirmação e [**2**] pág. 50 para uma definição equivalente do número π.)

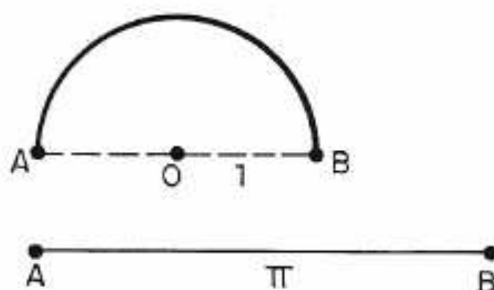


Figura 32

Escrevendo $C/2R = \pi$, vemos que o número π é a razão entre o comprimento de qualquer círculo e o seu diâmetro, sendo aproximadamente igual a 3,14159265. Uma pequena história deste número pode ser encontrada na Revista do Professor de Matemática, nº19, ou em [3], página 202.

2. Medida de arcos e o radiano

Para fazer referência a determinado arco de um círculo, costuma-se usar expressões do tipo "arco de 40°". Devemos entender esta expressão como *arco que subtende um ângulo central de* 40°. Assim, podemos nos referir aos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{A'B'}$ da figura 33 como arcos de 40°.

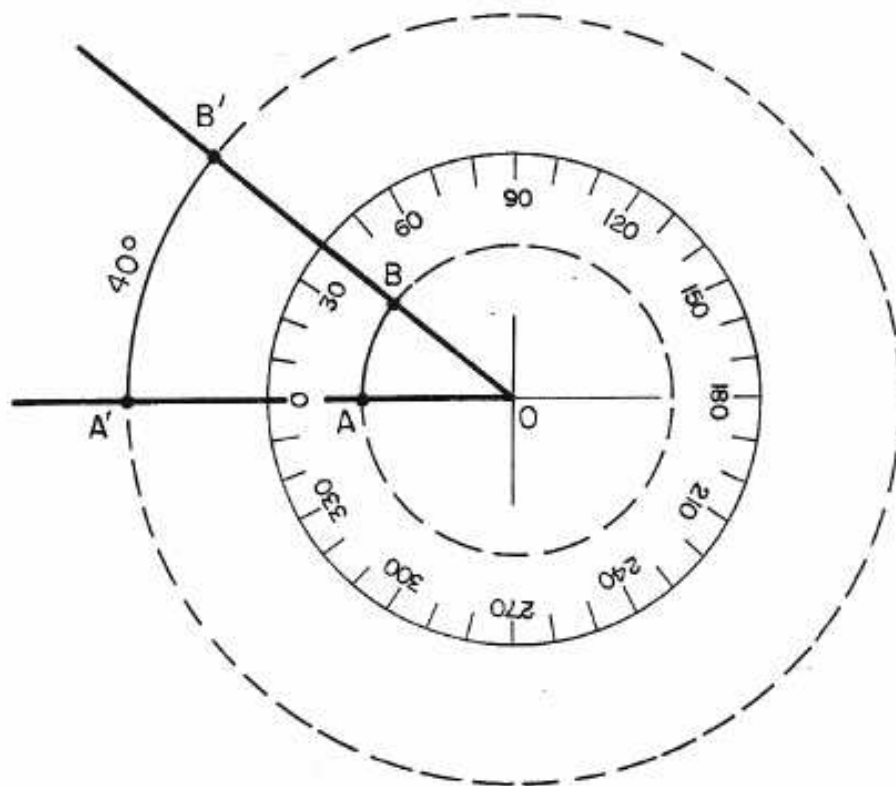


Figura 33

Vamos agora introduzir uma outra medida de ângulos. Sabemos que arcos de círculo que subtendem o mesmo ângulo central são semelhantes (veja [**2**] pág. 48) e que a razão de semelhança é a razão entre os raios. Assim, na figura 34 se s e s' são respectivamente os comprimentos dos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{A'B'}$ dos círculos de centro O e raios R e R', temos

$$\frac{s'}{R'} = \frac{s}{R}.$$

Em suma, dado o ângulo central, é constante a razão entre o comprimento do arco determinado e o raio. Isto nos permite definir:

A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo.

Assim, na figura 34, $\widehat{AOB} = \frac{s}{R}$ radianos = $\frac{s'}{R'}$ radianos. Em particular, decorre da definição que se s é o comprimento do arco determinado por um ângulo central de α radianos em um círculo de raio R, então

$$\alpha = \frac{s}{R}, \text{ ou seja,}$$
$$s = \alpha R.$$

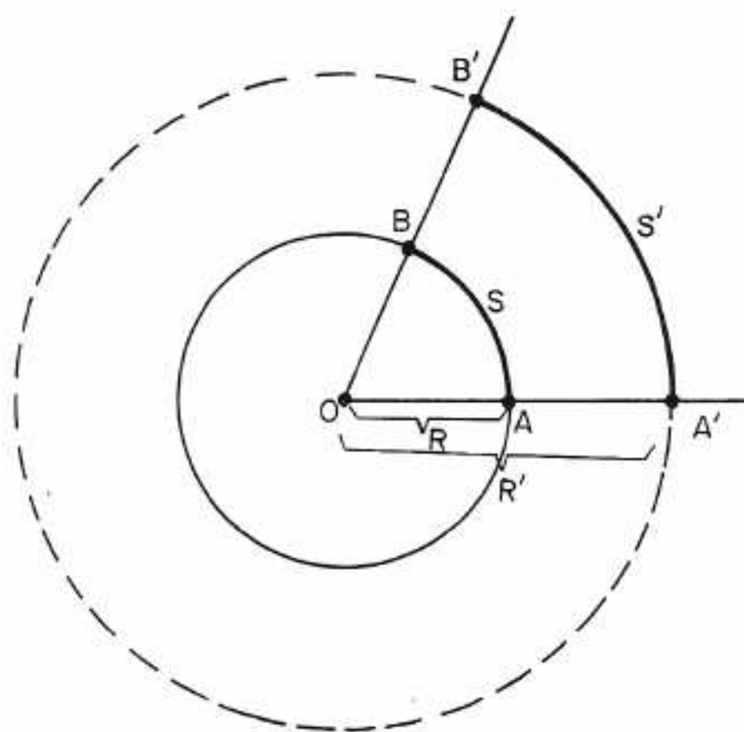


Figura 34

Como o comprimento de um semi-círculo (que é um arco de 180°) é πR temos que $180° = \frac{\pi R}{R} = \pi$ radianos. Assim, 1 radiano = $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \simeq$ 57°.

A medida de um ângulo em radianos não depende portanto da unidade de comprimento considerada. Quando $R = 1$ a medida do ângulo coincide com o comprimento do arco mas, desejamos enfatizar, esta última medida depende de uma unidade de comprimento enquanto que a primeira não. Mantendo em mente esta distinção conceitual, identificaremos, em um círculo de raio 1, arcos e ângulos correspondentes.

3. Círculo orientado

Um círculo pode ser percorrido em dois sentidos. Quando um deles é escolhido e denominado positivo, dizemos que o círculo está *orientado*.

Tradicionalmente, escolhemos o sentido anti-horário e fixamos no círculo unitário orientado um ponto A, chamado *origem dos arcos* (figura 35).

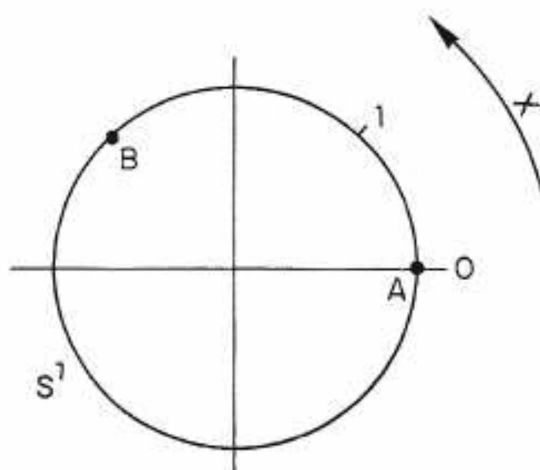


Figura 35

Definiremos a *medida algébrica* de um arco AB deste círculo como sendo o comprimento deste arco, associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for anti-horário, e negativo em caso contrário. Esta medida será representada por $m\widehat{AB}$.

4. As funções trigonométricas

Por enquanto, as funções trigonométricas estão definidas para ângulos do intervalo $(0°, 90°)$. Como esses ângulos podem ser medidos em radianos estão naturalmente definidos o seno, o cosseno e a tangente de números reais do intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. O próximo passo é tentar estender estas funções de modo que elas possam ser definidas para todos (ou quase todos) os números reais e que sejam mantidas as relações básicas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

e

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Para isto, consideremos a função $E : \mathbb{R} \to S^1$ definida do seguinte modo. Fixada uma origem A em S^1, e dado um número real x, percorremos sobre S^1, no sentido positivo se $x > 0$ e no sentido negativo se $x < 0$, um comprimento igual a x; por definição, $E(x)$ é o ponto de S^1 assim atingido (figura 36).

Observe que se $x > 0$ e $x > 2\pi$, será necessário dar mais de uma volta

em S^1, no sentido positivo, para atingir $E(x)$; uma observação análoga vale para o caso de ser $x < 0$. Seja como for, $E(x)$ é um ponto bem definido de S^1. Por outro lado, dado um ponto P de S^1, ele é a imagem pela função E de uma infinidade de números reais (figura 37), todos eles da forma

$$x + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad 0 \leq x < 2\pi.$$

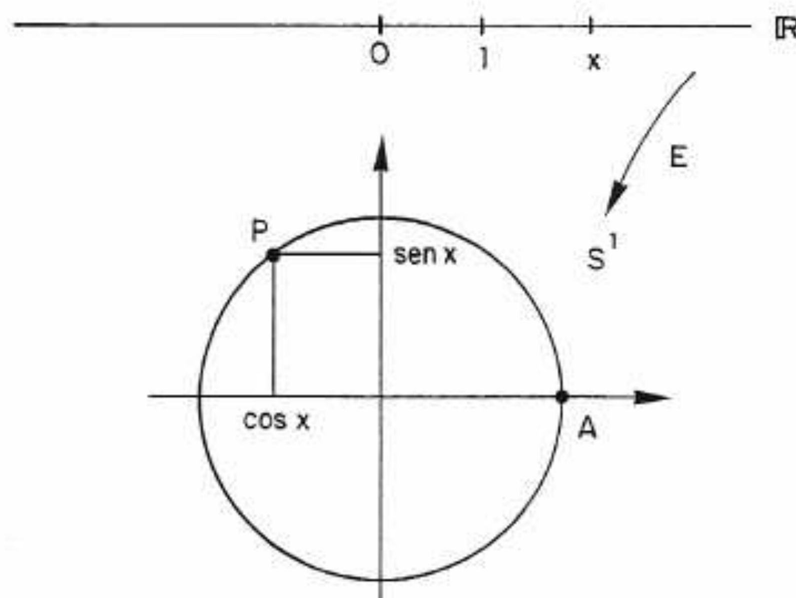


Figura 36. $E(x) = P$, $m\widehat{AP} = x$

Às vezes, se costuma exprimir este fato dizendo que $x + 2k\pi$ são as "várias determinações" do ângulo $\widehat{AP}$ (querendo dizer com isto que $x+2k\pi$ são os vários pontos da imagem inversa de P) ou que x e $x+2k\pi$ são *côngruos* (querendo dizer com isto que a diferença entre eles é um múltiplo inteiro de 2π).

No sistema de coordenadas cuja origem é o centro de S^1 e sendo $A = (1, 0)$ definimos

$$\cos x = \text{ abscissa de } P,$$
$$\operatorname{sen} x = \text{ ordenada de } P,$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \text{se} \quad \cos x \neq 0.$$

É claro que esta definição coincide com a anterior quando $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Além disso permite escrever $\cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$ (quando $P = A$),

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ e $sen\frac{\pi}{2} = 1$ (quando $\widehat{AOP}$ é reto). Ainda, como todo ponto $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ de S^1 está a uma distância 1 da origem, temos

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

A nova definição, portanto, estende a primeira e mantém as relações básicas. Observe que $\operatorname{tg} x$ não é definida para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k inteiro) porque para estes valores, $\cos x = 0$.

Naturalmente, para todo k inteiro, e para todo x real, $\operatorname{sen}(x+2k\pi) = \operatorname{sen} x$ e $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ porque $E(x + 2k\pi) = E(x) = P$ (figura 37). Este fato, significa que as funções seno e cosseno são periódicas com período 2π, isto é, se conhecemos o comportamento destas funções no intervalo $[0, 2\pi]$ passamos a conhecer imediatamente como estas funções se comportam em todos os intervalos seguintes (ou anteriores) de comprimento 2π. Em outras palavras, o gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é exatamente o mesmo em qualquer intervalo da forma $[2k\pi, 2(k + 1)\pi]$. Podemos então restringir o estudo destas funções ao intervalo $[0, 2\pi]$ que corresponde ao estudo das coordenadas de um ponto que dá exatamente uma volta no círculo trigonométrico.

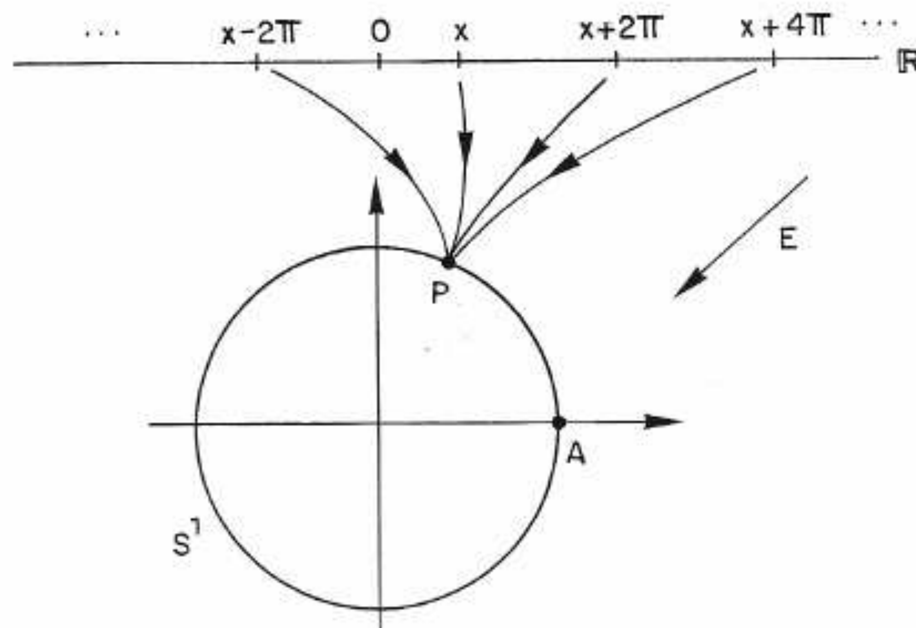


Figura 37. $\overset{\frown}{AP} = x + 2k\pi$

As funções seno e cosseno, como coordenadas de um ponto, têm sinais que dependem do quadrante em que se encontram (figura 38). Vamos mostrar como é possível determinar o valor da função seno, por

exemplo, em qualquer quadrante, conhecidos seus valores no primeiro quadrante.

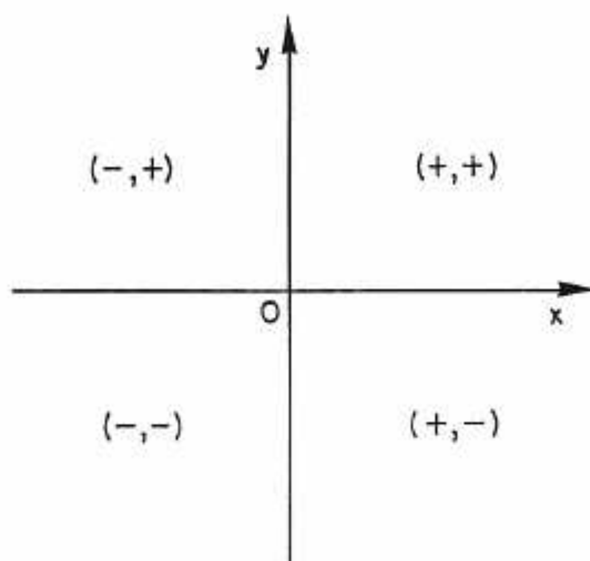


Figura 38

Consideremos separadamente os casos em que a extremidade B do arco AB está no segundo, terceiro ou quarto quadrante.

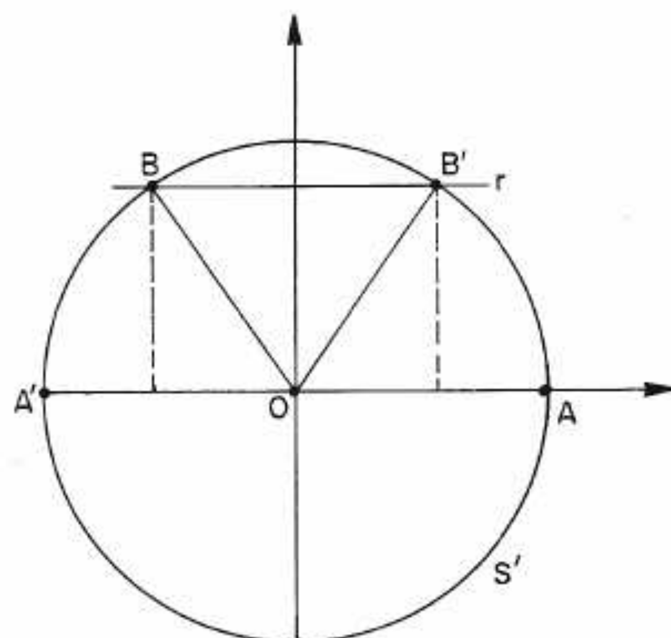


Figura 39. $m\widehat{AB} = x$

a) x *está no segundo quadrante*, isto é, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Traçamos por B uma reta r paralela ao eixo das abscissas que intersecta novamente S^1 em B' (figura 39). É claro que $m\widehat{AB'} = m\widehat{BA'} =$

$\pi - x$ e portanto $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$.

b) *x está no terceiro quadrante*, isto é, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Tomando como r a reta que liga O a B (figura 40) obteremos $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(x - \pi)$.

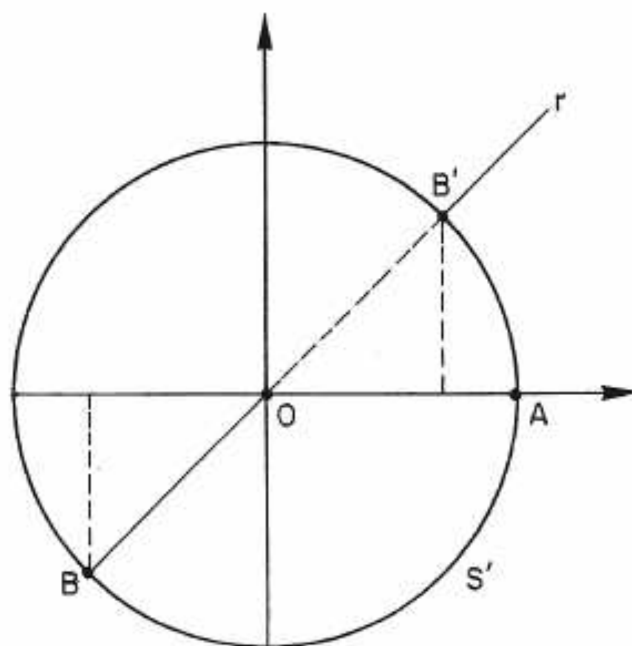


Figura 40. $m\widehat{AB} = x$

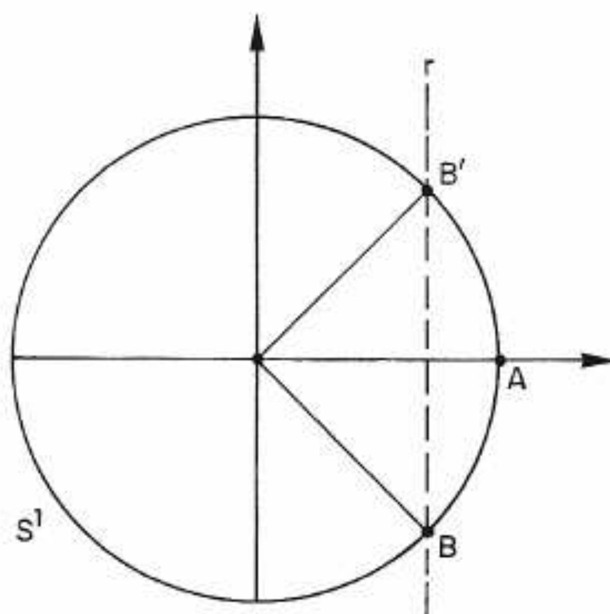


Figura 41

c) *x está no quarto quadrante*, isto é, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

Tomando como r uma paralela ao eixo das ordenadas passando por B, obteremos $m\widehat{AB'} = 2\pi - x$ e $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x)$ (figura 41).

O mesmo processo (chamado *"redução do seno ao primeiro quadrante"*) pode ser aplicado ao cosseno. A melhor maneira de proceder, entretanto, é esquecer as fórmulas e, em cada caso particular, reproduzir uma das construções (a), (b) ou (c), conforme se esteja no segundo, terceiro, ou quarto quadrante, respectivamente.

A conclusão do que acabamos de fazer, é que os valores absolutos das funções trigonométricas estão determinados pelos valores destas funções no primeiro quadrante.

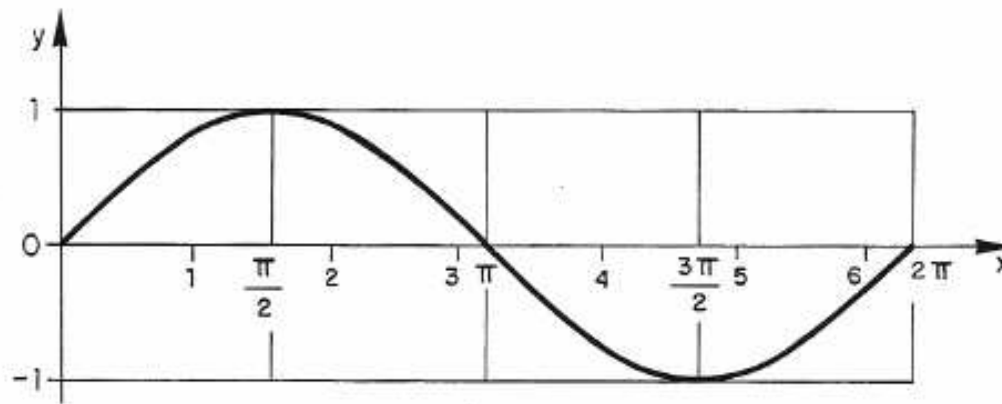


Figura 42. $y = \operatorname{sen} x$ **(um período)**

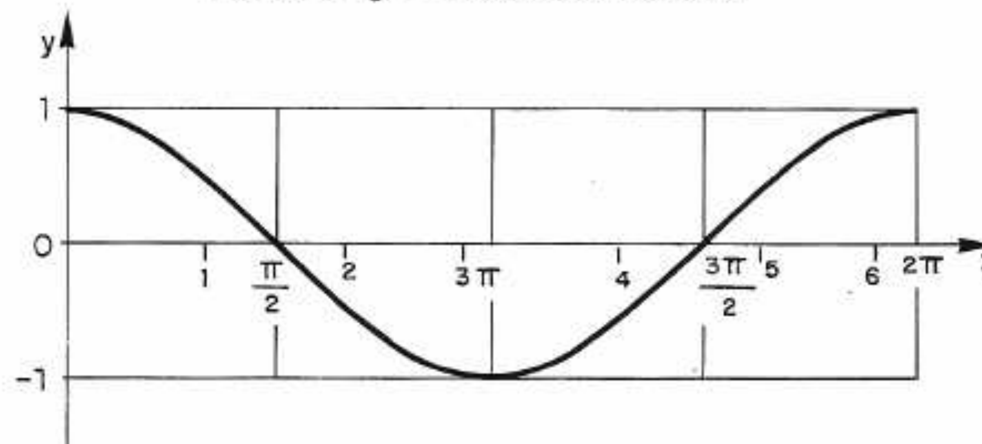


Figura 43. $y = \cos x$ **(um período)**

Para se ter uma idéia do comportamento global de uma função trigonométrica é conveniente traçar o seu gráfico. Por exemplo, o *gráfico da função seno*, isto é, o *conjunto dos pontos do plano de coordenadas* $(x, \operatorname{sen} x)$, reúne em uma figura todas as informações que obtivemos sobre a função seno. A princípio, seria necessário conhecer todos os pontos $(x, \operatorname{sen} x)$ para poder traçar o gráfico. Entretanto, o conjunto de pontos de que já dispomos permite traçar uma figura bastante aproximada do gráfico, que apresentamos abaixo (figura 42).

Da mesma maneira, obteríamos o *gráfico do cosseno*, isto é, o conjunto dos pontos do plano de coordenadas $(x, \cos x)$ (figura 43).

Observe que o seno e o cosseno variam entre -1 e 1. Para obtermos os gráficos completos destas funções, repetiremos os gráficos anteriores uma infinidade de vezes como se pode ver nas figuras seguintes.

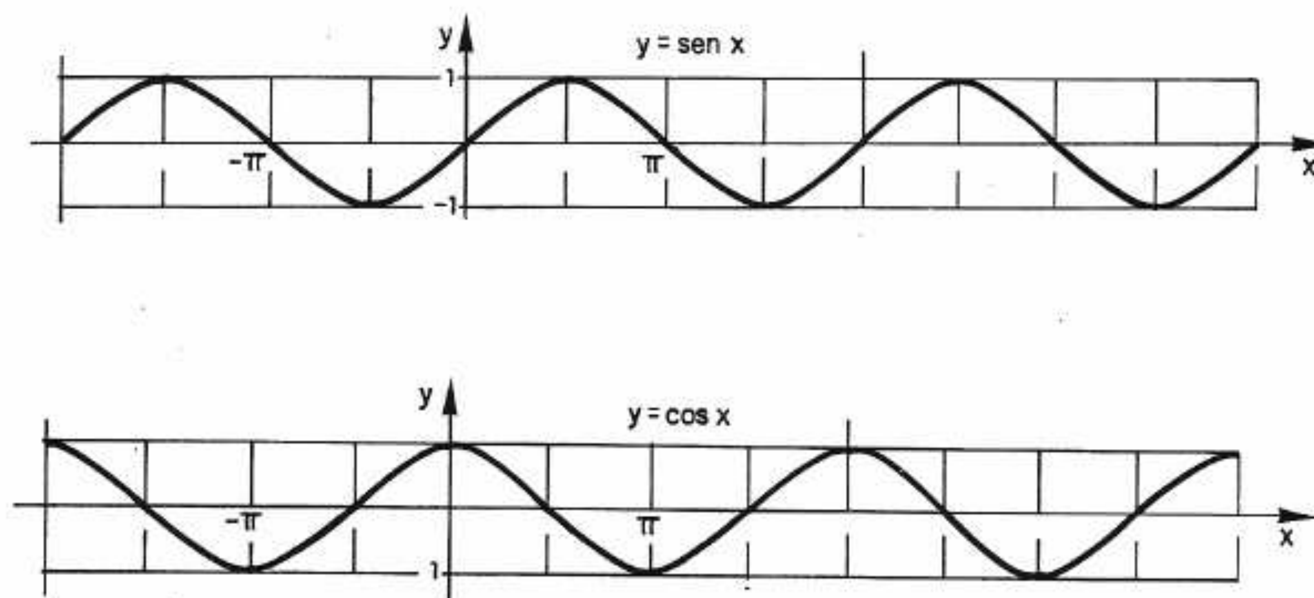


Figura 44

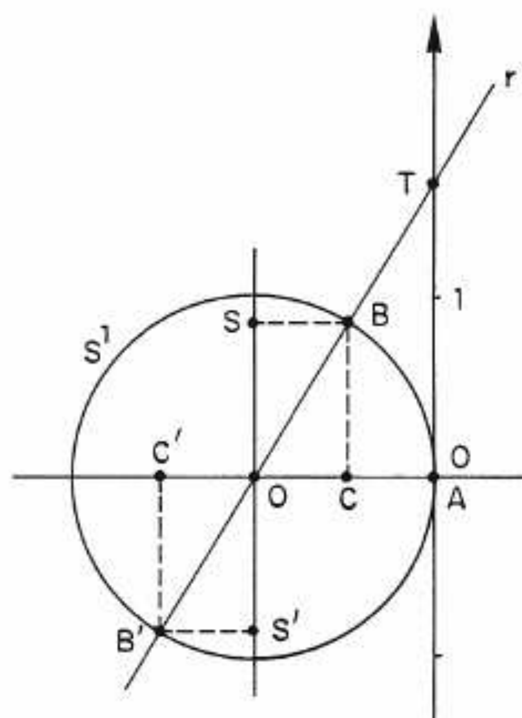


Figura 45. A unidade no novo eixo é o raio do círculo

Observando a figura 44, percebemos uma grande semelhança entre as

duas curvas. Na realidade elas são idênticas. Esta curva, chamada *senoid* é a mesma em ambos os casos. O gráfico da função cosseno é apenas resultado de uma translação de $\pi/2$ para a esquerda no gráfico da funçã seno.

A função tangente foi definida por $\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x/\cos x$ para $x \neq \pi/2 + k\pi$. Vamos mostrar que tgx pode ser vista como medida algébric de um segmento. Consideremos uma reta orientada tangente em A a S como na figura 45 e seja AB um arco de medida x. A reta r que contém (e B determina B' em S^1 e T no novo eixo. Mostremos que $\operatorname{tg} x = mAT$ ou seja, $\operatorname{tg} x$ é a medida algébrica do segmento AT.

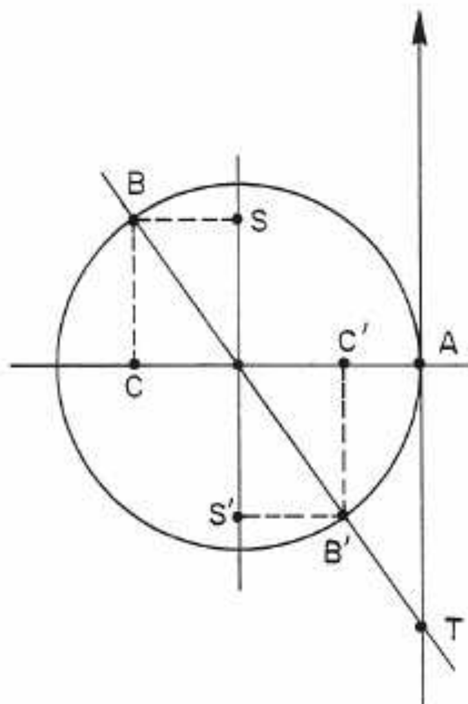


Figura 46

a) *B está no primeiro ou terceiro quadrante*

Os triângulos $OCB, OSB, OC'B'$ e $OS'B'$ da figura 45 são con gruentes e semelhantes ao triângulo OAT. Portanto,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = mAT$$

e

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\overline{OS'}}{-\overline{OC'}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = mAT$$

b) *B está no segundo ou quarto quadrante*

As relações de semelhança entre os triângulos da figura 46 são análogas. Obteremos, neste caso,

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+\pi) = -\overline{AT} = mAT$$

Observe que, em qualquer caso, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+\pi)$, o que mostra que a tangente é uma função periódica com período π. Para valores próximos e menores que $\pi/2$ a tangente torna-se maior que qualquer número positivo dado, e para valores próximos e maiores que $\pi/2$ a tangente torna-se menor que qualquer número negativo dado. Podemos então esboçar o gráfico da função tangente no intervalo $[0, \pi]$ e repetí-lo em todos os intervalos da forma $[k\pi, (k+1)\pi]$ (figura 47).

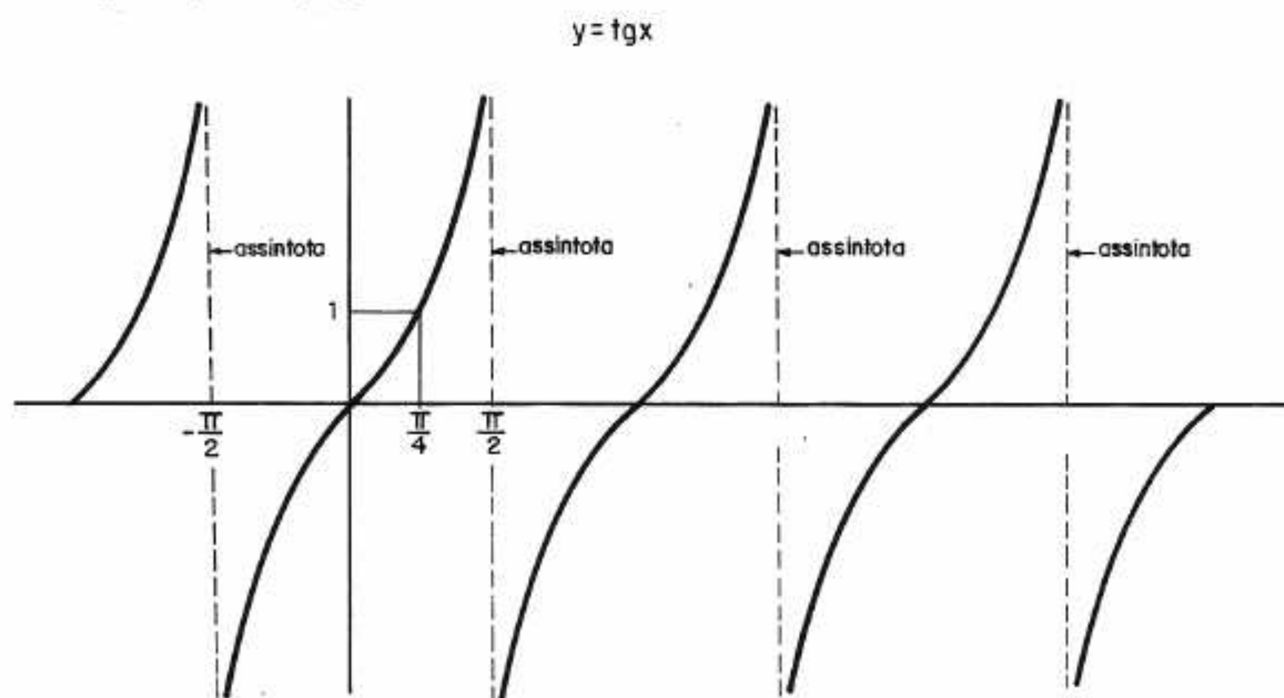


Figura 47. $y = \operatorname{tg} x$

Às vezes é conveniente introduzir funções trigonométricas auxiliares. Como as recíprocas

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad \frac{1}{\cos x} \quad \text{e} \quad \frac{1}{tgx},$$

aparecem nos cálculos com bastante frequência, as definições seguintes foram adotadas:

secante de x

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \text{ se } \cos x \neq 0,$$

cossecante de x

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \text{ se } \operatorname{sen} x \neq 0,$$

cotangente de x

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \text{ se } \operatorname{sen} x \neq 0.$$

As propriedades destas funções aparecerão nos exercícios. Mostraremos apenas seus gráficos, que podem ser obtidos diretamente dos gráficos das três primeiras funções.

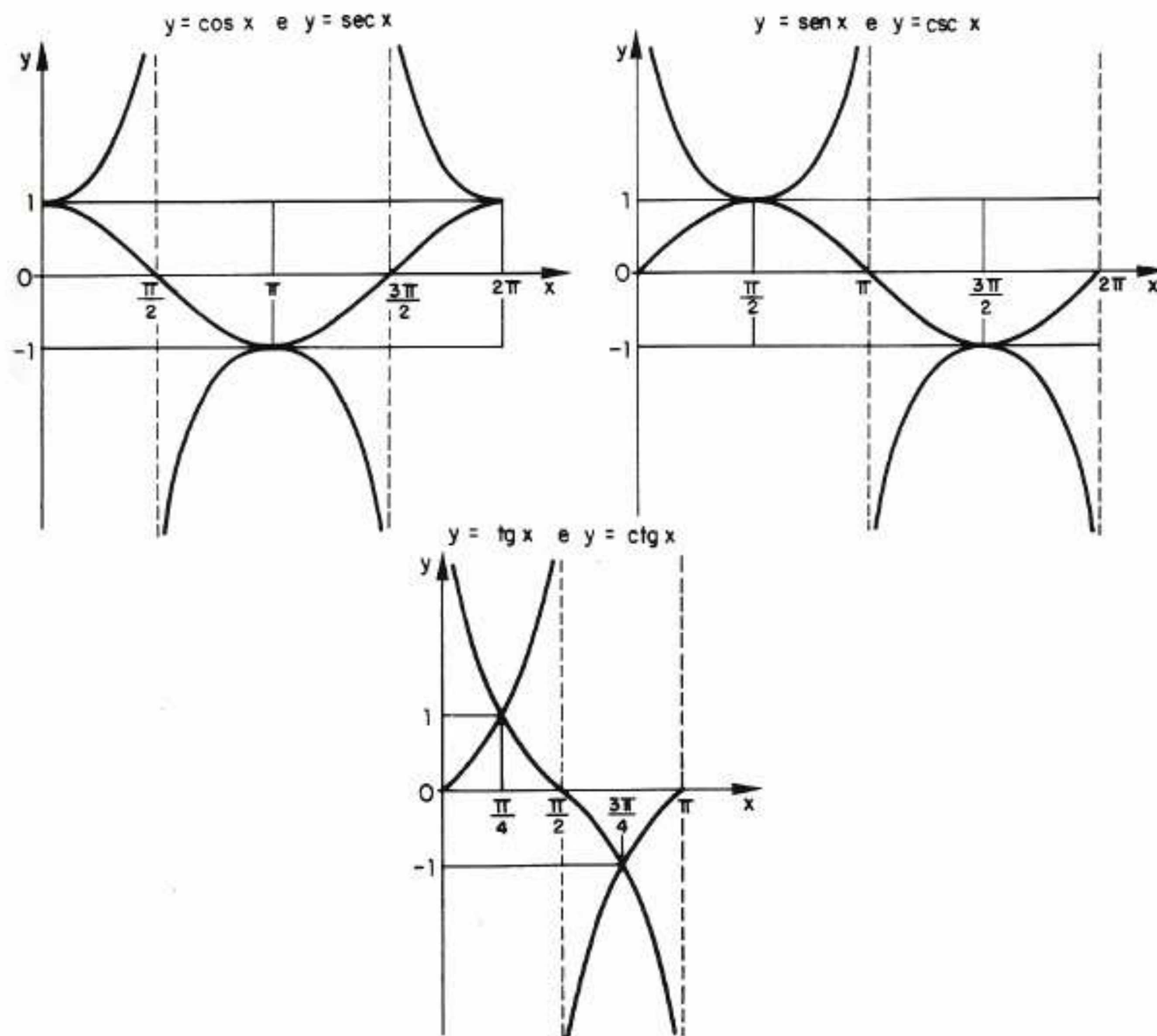


Figura 48

Exercícios

1. Em que quadrante se tem simultaneamente:

a) $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta < 0$?.

b) $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\operatorname{tg}\theta < 0$?.

c) $\cos\theta > 0$ e $\operatorname{tg}\theta > 0$?.

2. A que quadrantes pode pertencer θ, se:

a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{4}$.

b) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $\operatorname{tg}\theta = 7\sqrt{3}$.

3. Calcule

a) $\operatorname{sen} 345°$.

b) $\cos 210°$.

c) $\operatorname{tg} 135°$.

4. Para que valores de $\theta, 0 \le \theta < 2\pi$, se tem:

a) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2}$.

b) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\operatorname{tg}\theta = -1$.

d) $\cos\theta = 2$.

5. Calcule:

a) $\operatorname{tg} 1.935°$.

b) $\operatorname{sen} 3.000°$.

c) $\cos\dfrac{12\pi}{5}$.

d) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}$.

e) $\operatorname{sen}\dfrac{10\pi}{3}$.

f) $\dfrac{\cos 765° - \operatorname{sen} 1.395°}{\operatorname{tg} 1.410°}$.

6. Verifique que as igualdades abaixo valem para todo valor de $x \neq 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$, onde n é um número inteiro qualquer. Tais igualdades são chamadas *identidades trigonométricas*.

a) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

b) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

7. Determine o conjunto dos números reais x para os quais $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Seja s o lado de um polígono regular de n lados e R o raio do círculo inscrito neste polígono. Mostre que: $s = 2R \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$.

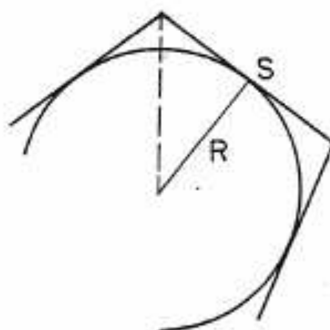


Figura 49

9. Mostre que o perímetro de um pentágono regular inscrito em um círculo unitário é dado por $10 \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$.

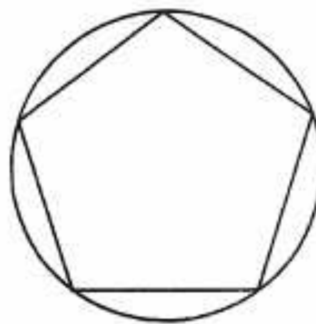


Figura 50

10. Encontre as três menores soluções positivas da equação

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

11. Determine o conjunto dos números reais x tais que

$$\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

12. Quantos são os valores distintos de $\cos\frac{k\pi}{3}$, k inteiro?

13. Determine para que valores de x a função $y = 5 - \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ assume seu valor máximo.

14. Determine o conjunto dos números reais x tais que $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$.

15. Verdadeiro ou falso?

a) $\operatorname{sen} 2 > 0$
b) $\cos 4 < 0$
c) $\operatorname{sen} 3 > \operatorname{sen} 2$
d) $\cos 3 > \cos 2$
e) $\operatorname{tg} 5 > \operatorname{tg} 6$
f) $\cos\frac{\pi}{4} > \cos 1$
g) $\cos\sqrt{3} < 0$

16. Para que valores de x tem-se $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$?

17. Verifique que as extremidades dos arcos x e $-x$ são simétricas em relação ao eixo das abscissas; que as extremidades dos arcos x e $\pi - x$ são simétricas em relação ao eixo das ordenadas e que as extremidades dos arcos x e $\pi + x$ são simétricas em relação à origem. Conclua que:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, & \cos(-x) = \cos x, & \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x, & \cos(\pi - x) = -\cos x, & \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x, & \cos(\pi + x) = -\cos x, & \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x. \end{array}$$

18. Verifique que as extremidades dos arcos x e $\frac{\pi}{2} - x$ são simétricas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Conclua que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x,$$

e

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$$

19. Usando os resultados dos exercícios 17 e 18, mostre que

$$\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2} + x) = \cos x, \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{sen} x, \quad \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{ctg} x,$$
$$\operatorname{sen}(\tfrac{3\pi}{2} - x) = -\cos x, \quad \cos(\tfrac{3\pi}{2} - x) = -\operatorname{sen} x, \quad \operatorname{tg}(\tfrac{3\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg} x,$$

$$\text{sen}(\tfrac{3\pi}{2} + x) = -\cos x, \quad \cos(\tfrac{3\pi}{2} + x) = \text{sen}\, x, \quad \text{tg}(\tfrac{3\pi}{2} + x) = -\text{ctg}\, x.$$

20. Sabendo que $m\widehat{AP} = x$, verifique, observando as figuras abaixo que $\text{ctg}\, x = t, \sec x = s$ e $\text{cosec}\, x = s'$.

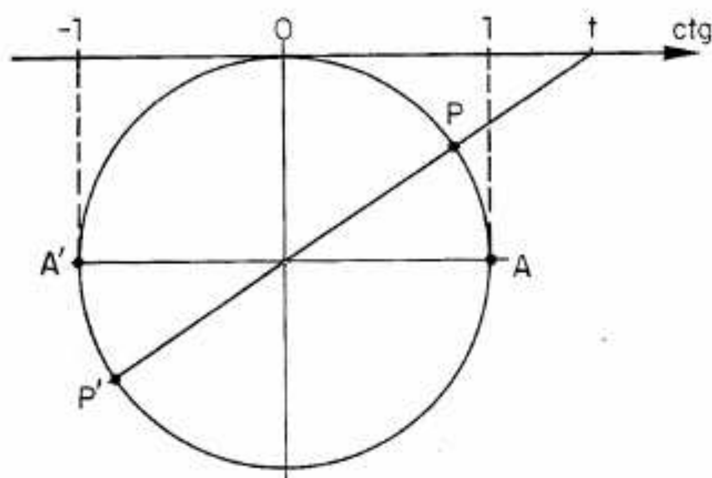


Figura 51a

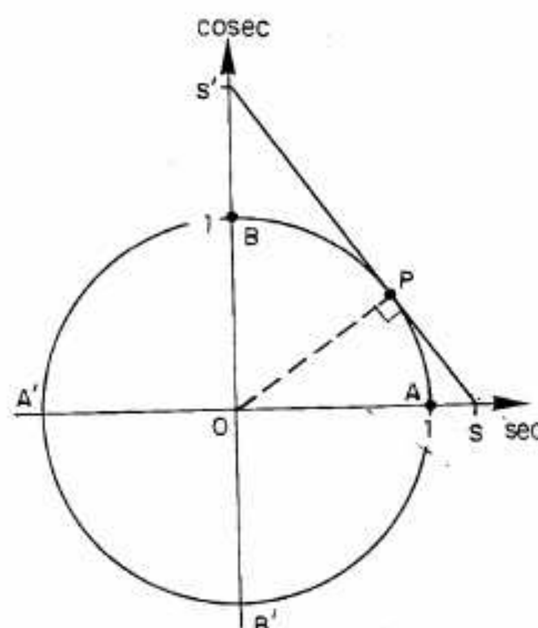


Figura 51b

21. Determine as imagens das funções secante, co-secante e cotangente.

22. Prove as relações

$$\text{ctg}\, x = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{tg}\, x}, & \text{se } x \neq k\dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{se } x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$$

$$\text{cosec}^2 x = 1 + \text{ctg}^2 x$$

23. Se x está no segundo quadrante e $\text{tg}\, x = -2\sqrt{2}$, calcule as demais funções de x.

24. Determine todas as soluções da equação

$$\sec\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2$$

25. Prove as identidades abaixo, para $x \neq n\pi/2$:

a) $\sec x \cdot \operatorname{ctg} x = \operatorname{cosec} x$.

b) $\dfrac{\sec x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \operatorname{sen} x$.

c) $\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = 2\operatorname{sen}^2 x - 1$.

26. Calcular m para que exista um ângulo x com

$$\cos x = \frac{2}{m-1} \text{ e } \operatorname{tg} x = \sqrt{m-2}$$

27. Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

a) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$.

b) $\dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

c) $\dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = (\sec x - \operatorname{tg} x)^2$.

d) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x} = 1 + \cos x$.

28. Sabendo que $\operatorname{tg} x + \sec x = \frac{3}{2}$, calcular $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

29. Sabendo que $\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2$, calcular $\operatorname{tg} x$.

30. Sabendo que $\operatorname{sen} x + \cos x = m$, calcular $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$.

31. Sabendo que $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1$, provar que $\cos^4 x + \cos^2 x = 1$.

32. Provar que para quaisquer números reais a e b,

$$2(1 - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) \geq \cos^2 a + \cos^2 b$$

33. Sabendo que

$$\begin{cases} 1 + \cos x = a \operatorname{sen} x \\ 1 - \cos x = b \operatorname{sen} x \end{cases}$$

encontre uma relação entre a e b.

34. Calcule k de modo que as raízes da equação

$$x^2 - 2kx + k^2 + k = 0$$

sejam o seno e o cosseno de um mesmo ângulo.

35. Sabendo que

$$\begin{cases} a \sec x = 1 + \operatorname{tg} x \\ b \sec x = 1 - \operatorname{tg} x \end{cases}$$

encontre uma relação entre a e b.

36. Prove que para todo x

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x - 2\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x + \operatorname{sen}^2 x = 0$$

37. Prove a identidade abaixo, válida para todo x onde a expressão do lado esquerdo está bem definida.

$$\frac{\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^3 x}{2\cos^3 x - \cos x} = \operatorname{tg} x$$

38. Determinar para que valores de a a equação $1 + \operatorname{sen}^2 ax = \cos x$ admite alguma solução não nula.

39. De um triângulo ABC são dados o lado $\overline{BC} = a$ e o ângulo $\widehat{ABC} = \alpha$. Determinar em cada um dos casos: $\alpha < 90°, \alpha = 90°$ e $\alpha > 90°$ que valores pode ter o lado AC para garantir a existência do triângulo. Determine ainda, em que caso pode existir mais de uma solução.

40. É possível provar que tomando círculos centrados em O os arcos determinados nestes círculos por duas semi-retas OA e OB são proporcionais aos seus raios, isto é,

$$\frac{S_1}{OA_1} = \frac{S_2}{OA_2} = \frac{S_3}{OA_3} \cdots$$

(ver Figura 52a).

Este fato se relaciona com a medida do raio da Terra feita por Eratóstenes (grego, 200 anos a.C.). Consultando as observações astronômicas acumuladas durante séculos na biblioteca de Alexandria, Eratóstenes soube que em Siena, 5.000 estádios (medida grega de comprimento) ao sul de Alexandria, o sol se refletia no fundo de um poço ao meio dia de um certo dia de cada ano. Ao meio-dia deste tal dia, Eratóstenes mediu o ângulo que o raio do Sol fazia com a vertical de Alexandria, achando

aproximadamente 7°. Mostre que este processo dá para o raio da Terra o valor aproximado de $\frac{250.000}{2\pi}$ estádios.

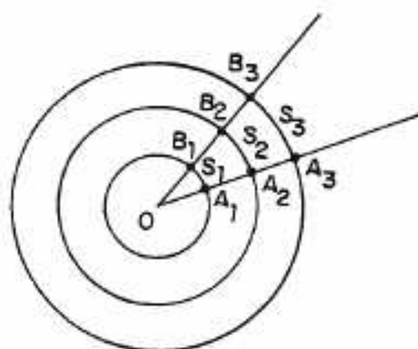


Figura 52a

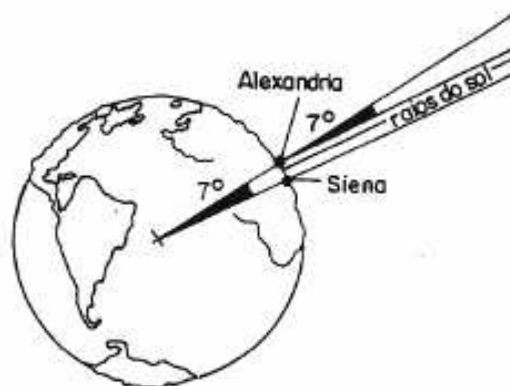


Figura 52b

4. As leis do seno e do cosseno

1. As fórmulas de adição

Nesta seção, vamos deduzir as fórmulas que calculam as funções trigonométricas da soma e da diferença de dois arcos cujas funções são conhecidas. Para obter a primeira delas devemos lembrar que a distância entre dois pontos do plano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada por

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Consideremos então no círculo unitário os pontos P e Q tais que $m\widehat{AP} = a$ e $m\widehat{AQ} = b$ (figura 53). Como $P = (\cos a, \operatorname{sen} a)$ e $Q = (\cos b, \operatorname{sen} b)$, a distância d entre os pontos P e Q é dada por

$$d^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2.$$

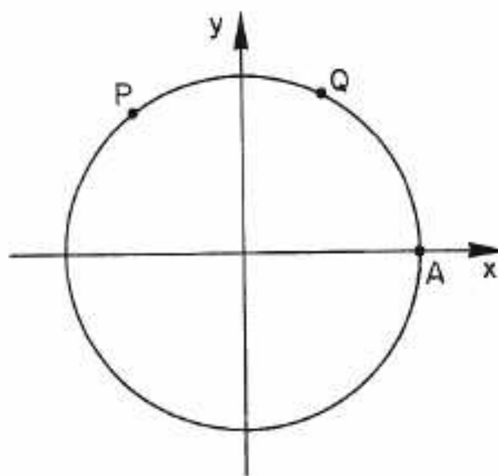


Figura 53

Desenvolvendo os quadrados e lembrando que $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ obtemos

$$d^2 = 2 - 2(\cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b).$$

Mudemos agora o nosso sistema de coordenadas girando os eixos de um ângulo b em torno da origem (figura 54).

Neste novo sistema, o ponto Q tem coordenadas 1 e 0 e o ponto Q tem coordenadas $\cos(a-b)$ e $\operatorname{sen}(a-b)$. Calculando novamente a distância entre os pontos P e Q, obtemos

$$d^2 = (1-\cos(a-b))^2 + (0-\operatorname{sen}(a-b))^2$$

ou $d^2 = 2 - 2\cos(a-b)$.

Igualando os valores de d^2, temos

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b. \qquad (1)$$

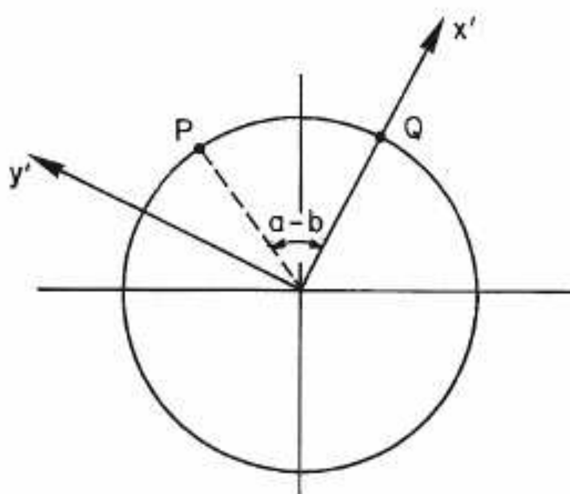


Figura 54

Outras três fórmulas decorrem facilmente da que acabamos de obter. Substituindo em (1) b por $-b$ encontramos

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b. \qquad (2)$$

Aplicando a fórmula (1) para os arcos $\frac{\pi}{2} - a$ e b encontramos

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a \qquad (3)$$

e substituindo nesta última b por $-b$, obtemos

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a. \qquad (4)$$

Finalmente, para calcular a tangente de $a-b$, dividimos as fórmulas (4) e (1).

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} - \dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}$$

ou

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}, \tag{5}$$

onde na segunda igualdade dividimos ambos os membros da fração por $\cos a\cdot\cos b$, que supomos diferente de zero. Mais uma vez, substituindo na fórmula (5) b por $-b$, encontramos

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}. \tag{6}$$

Assim, por exemplo, se desejamos calcular o seno de 105°, fazemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}105^\circ &= \operatorname{sen}(60^\circ+45^\circ)=\operatorname{sen}60^\circ\cdot\cos45^\circ+\operatorname{sen}45^\circ\cdot\cos60^\circ\\ &=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

É também conveniente obter as fórmulas que calculam as funções trigonométricas de um arco que é o dobro de um arco cujas funções já são conhecidas. Basta então fazer $b=a$ nas fórmulas (2), (3) e (6) para encontrar

$$\cos 2a=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a,$$

$$\operatorname{sen}2a=2\cdot\operatorname{sen}a\cdot\cos a,$$

$$\operatorname{tg}2a=\frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a}.$$

A mais importante conseqüência dessas fórmulas é o fato que $\operatorname{sen}x$, $\cos x$ e $\operatorname{tg}x$ podem se expressar racionalmente (isto é, sem radicais) em termos de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Com efeito,

$$\operatorname{sen}x=\frac{2\cdot\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}}=\frac{2\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}.$$

Fazendo então $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, obtemos

$$\operatorname{sen}x=\frac{2t}{1+t^2},$$

e trabalhando de forma análoga com a identidade $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$ encontramos

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Estas expressões são úteis na resolução de algumas equações trigonométricas, como veremos no capítulo 5. Uma outra utilidade das expressões acima é que, por meio delas, podemos descrever as coordenadas dos pontos do círculo unitário como funções racionais de um parâmetro t cujo significado geométrico é dado na figura abaixo.

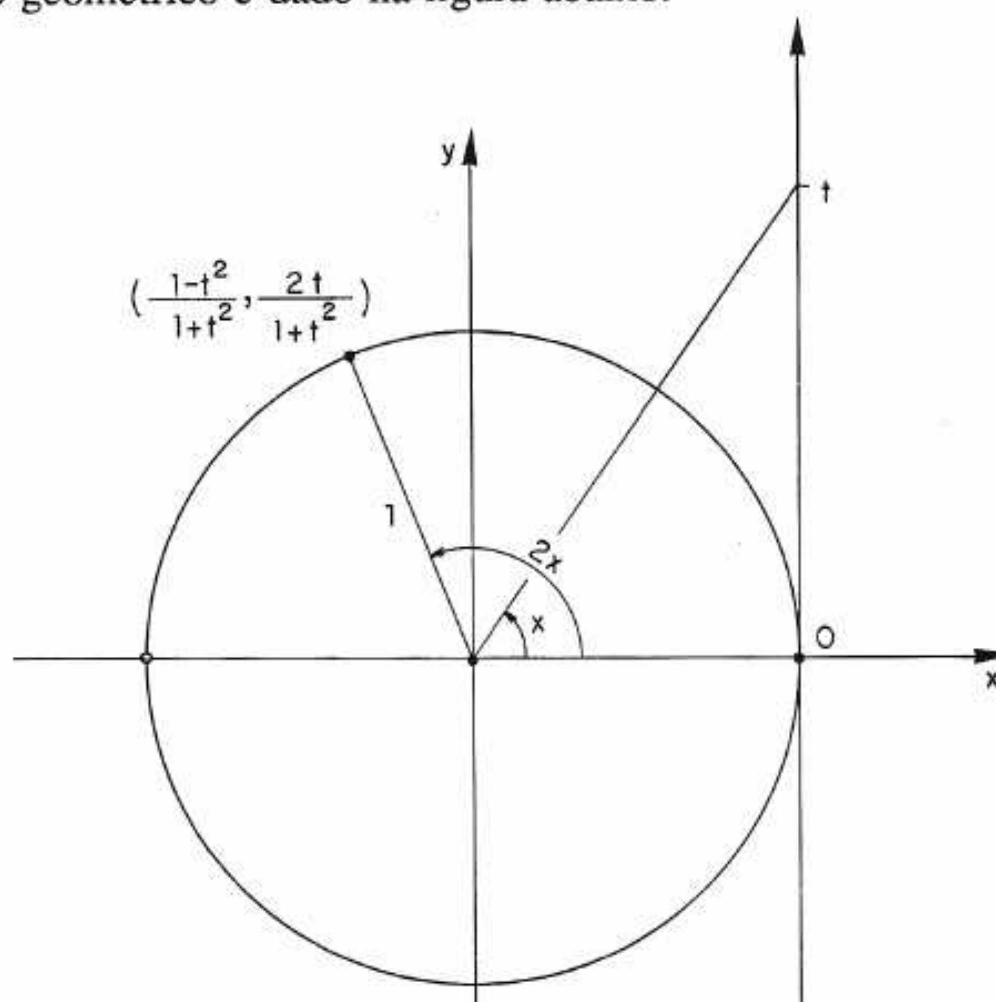


Figura 55

Observe que o ponto $(-1, 0)$ não está incluído nesta descrição. Uma tal descrição é chamada uma *parametrização racional do círculo* e desempenha um papel importante em estudos posteriores de Geometria.

2. A lei do cosseno

Seja ABC um triângulo qualquer com lados a, b e c. Vamos demonstrar que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$. Tracemos então a altura BH e consideremos

os dois casos seguintes:

a) $\hat{A}$ é agudo.

Fazendo $\overline{BH} = h$ e $\overline{AH} = x$ como na figura 55, temos no triângulo BHC,

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2 \text{ ou}$$
$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2 \text{ ou}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx.$$

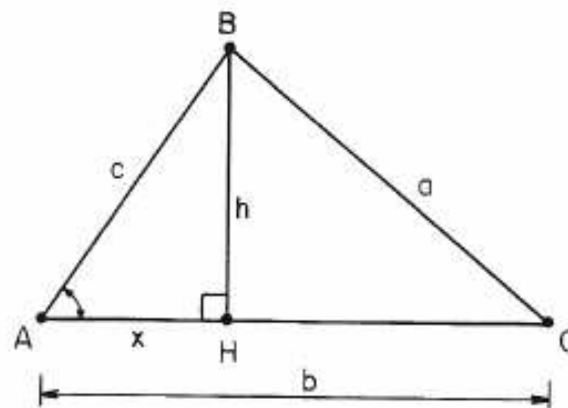


Figura 56a

Sendo $x = c \cdot \cos \hat{A}$, segue-se que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$, como queríamos.

b) $\hat{A}$ é obtuso

Fazendo, da mesma forma, $\overline{BH} = h$ e $\overline{AH} = x$ como na figura 56, temos no triângulo BHC,

$$a^2 = h^2 + (b + x)^2 \text{ ou}$$
$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + 2bx + x^2 \text{ ou}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx.$$

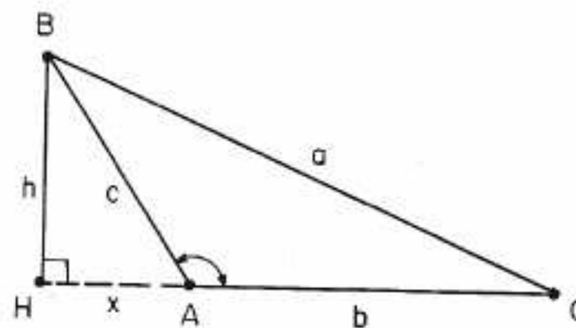


Figura 56b

Como $x = c \cdot \cos \widehat{BAH} = c(-\cos \hat{A})$ segue-se que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A,$$

como havíamos confirmado. A expressão

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

é chamada a *lei do cosseno*. Observe que se $\hat{A}$ é reto, o resultado acima é o Teorema de Pitágoras.

A lei do cosseno possui muitas aplicações em problemas de Geometria. Por exemplo, conhecendo os lados de um triângulo podemos calcular seus ângulos (através de seus cossenos), alturas, medianas etc. Para ilustrar, consideremos o problema seguinte:

"De um triângulo ABC conhecemos o ângulo $\hat{B} = 60°$ e as medidas de dois lados: $\overline{BC} = 8$ e $\overline{AC} = 7$. Calcular a medida de AB."

Um triângulo ABC com os dados do problema está na figura 57. A lei do cosseno relativa ao ângulo $\hat{B}$ é

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}.$$

Substituindo os valores conhecidos, obtemos a equação $c^2 - 8c + 15 = 0$ que fornece os valores $c = 3$ e $c = 5$. Surge então uma pergunta natural. Porque encontramos dois valores para c? Respondemos a essa pergunta examinando a construção do triângulo com os dados apresentados.

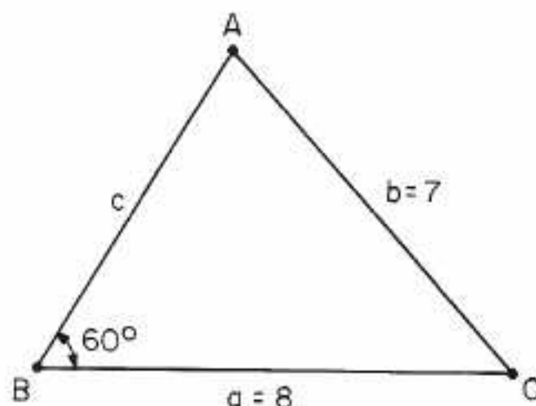


Figura 57

Para construir o triângulo ABC, desenhamos BC e a partir de B uma semi-reta BX tal que $\widehat{XBC} = 60°$. Em seguida com centro em C e raio 7 descrevemos um círculo que corta BX em dois pontos: A_1 e A_2. Existem portanto dois triângulos que satisfazem as condições do

problema, A_1BC e A_2BC (figura 58) e a lei do cosseno determinou que $\overline{A_1B} = 5$ e $\overline{A_2B} = 3$.

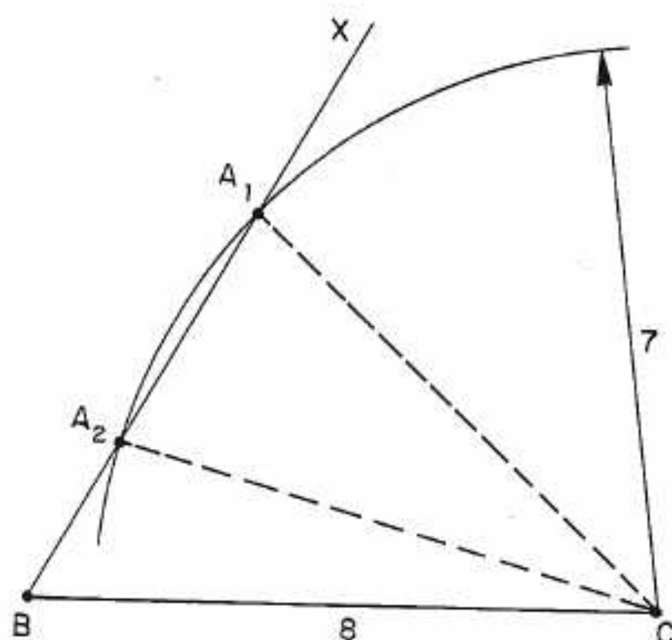


Figura 58

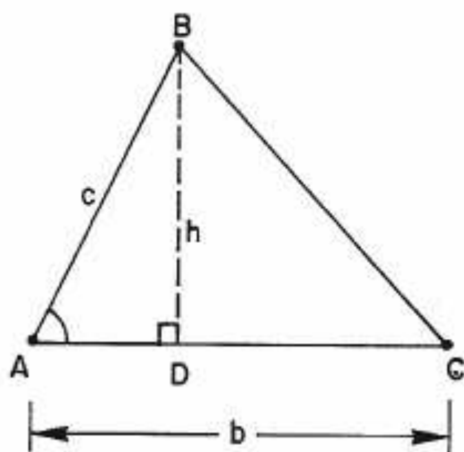


Figura 59A

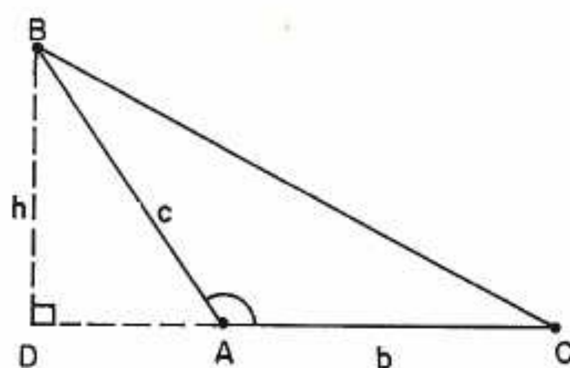


Figura 59B

3. A lei dos senos

Nesta seção demonstraremos que os comprimentos dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. Para a demonstração que pretendemos dar, é necessário lembrar que a área de um triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \hat{A} \qquad (7)$$

onde b e c são os comprimentos dos lados que formam o ângulo A. De

fato, traçando a altura BD do triângulo ABC temos:

a) Se $\hat{A}$ é agudo, observando a figura 59A, temos

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\hat{A};$$

b) Se $\hat{A}$ é obtuso, observando a figura 59B, temos

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc\,\text{sen}(\pi - \hat{A}) = \frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\hat{A};$$

c) Se $\hat{A}$ é reto,

$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc \cdot 1 = \frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\hat{A},$$

ficando provada em qualquer caso a afirmação (7).

Para demonstrar agora a lei dos senos, começamos por multiplicar por a (comprimento do lado BC do triângulo) a relação (7) para obter

$$aS = \frac{1}{2}abc\,\text{sen}\,\hat{A} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{abc}{2S}.$$

Por raciocínio inteiramento análogo, temos ainda para a área do triângulo ABC as expressões

$$S = \frac{1}{2}ac\,\text{sen}\,\hat{B} \tag{8}$$

$$S = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\hat{C} \tag{9}$$

o que nos permite escrever

$$\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{abc}{2S} \quad \text{e} \quad \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = \frac{abc}{2S}$$

Temos então que em qualquer triângulo ABC vale a relação

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}.$$

conhecida como a *lei dos senos*.

É importante notar que esta relação nos informa que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo cujos lados medem sen $\hat{A}$, sen $\hat{B}$ e sen $\hat{C}$. Diversas relações entre ângulos de um triângulo podem ser obtidas daí. Por exemplo, é verdade que em qualquer triângulo ABC vale a desigualdade

$\operatorname{sen}\hat{A} < \operatorname{sen}\hat{B} + \operatorname{sen}\hat{C}$ porque em qualquer triângulo devemos ter $a < b + c$.

Para mostrar uma aplicação, consideremos o problema de calcular a distância de um ponto para o outro, inacessível. Por exemplo, um observador está em um ponto A e deseja conhecer a distância deste ponto à um ponto P, como na figura 60. Como a medida não pode ser feita diretamente, o observador escolhe um ponto B qualquer (desde que P possa ser visto de B) e mede a distância $\overline{AB} = c$ e os ângulos $\widehat{PAB} = \alpha$ e $\widehat{PBA} = \beta$. Aplicando então a lei dos senos no triângulo PAB temos

$$\frac{\overline{PA}}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha - \beta)} \text{ ou seja,}$$

$$\overline{PA} = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}.$$

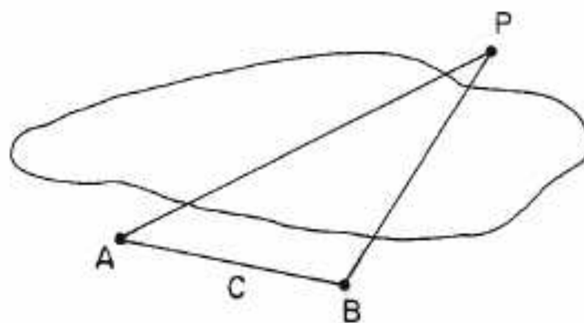


Figura 60

Exercícios

1. Os arcos a e b do primeiro quadrante são tais que $\operatorname{sen} a = 3/5$ e $\operatorname{sen} b = 12/13$. Calcular $\cos(a + b)$.

2. Os ângulos agudos a e b são tais que $\operatorname{tg} a = 1/2$ e $\operatorname{tg} b = 1/3$. Mostre que $a + b = 45°$.

3. Se $\operatorname{sen} a = 4/5$ e $\cos b = 3/5$, sendo a do segundo quadrante e b do primeiro quadrante, calcular $\operatorname{sen}(a - b)$.

4. Se $\operatorname{sen} a = \frac{1}{3}$, calcular $\operatorname{sen} 2a$ e $\cos 2a$.

5. Se $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$, calcular $\operatorname{tg} 2a$ e $\operatorname{tg} 3a$.

6. Provar que em todo triângulo não retângulo ABC, $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$.

7. Calcular

a) $y = \operatorname{sen} 15° \cdot \cos 15°$

b) $y = \sqrt{3} \operatorname{sen} 15° + \cos 15°$

c) $y = \frac{1+\operatorname{tg} 15°}{1-\operatorname{tg} 15°}$

8. Calcular $\operatorname{sen} \frac{x}{2}$ e $\cos \frac{x}{2}$ em função de $\cos x$.

9. Se $\operatorname{tg} x = -\frac{7}{24}$, calcular $\operatorname{sen} \frac{x}{2}, \cos \frac{x}{2}$ e $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

10. Sendo $2 \operatorname{sen} x + \cos x = 1$, calcule $\operatorname{tg} x$.

11. Calcule

a) $y = \cos 36° \cdot \cos 72°$.

b) $y = \operatorname{sen} 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40°$.

12. Demonstre as identidades

a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \operatorname{cosec} 2x$

b) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2 \operatorname{ctg} 2x$

c) $\frac{\sec^2 x}{2-\sec^2 x} = \sec 2x$

d) $\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

e) $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = 2 \cos^2 x$

f) $\frac{1}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = \cos 2x$

g) $\frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1+\cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

13. Determine o maior ângulo de um triângulo cujos lados medem $3, 5$ e 7.

14. Calcule as diagonais de um paralelogramo de lados 3 e 4 e que tem um ângulo de 60°.

15. Determine os lados de um triângulo ABC no qual se tem $a = 3, \hat{A} = 30°$ e $\hat{B} = 45°$.

16. Os lados de um triângulo ABC medem $a = 4, b = 5$ e $c = 6$. Mostre que $\hat{C} = 2\hat{A}$.

17. Calcule o cosseno do ângulo formado por duas diagonais de um cubo.

18. Calcule o cosseno do ângulo formado por duas faces de um octaedro regular.

19. Dois círculos são tangentes entre si e aos lados de um ângulo dado $2x$. Conhecendo o raio R do círculo maior, calcular o raio do círculo menor.

20. Mostre que o comprimento da mediana relativa ao vértice A do triângulo ABC de lados a, b e c é

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

21. Prove que em qualquer paralelogramo, a soma dos quadrados dos lados é igual a soma dos quadrados das diagonais.

22. Se $a \cdot \operatorname{sen} x + \cos x = a$, calcule $\cos x$.

23. Encontre uma relação entre a, b e c sabendo que

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a \\ \cos x + \cos y = b \\ \cos(x - y) = c \end{cases}$$

24. Dado $\operatorname{sen} x = -24/25$, x no terceiro quadrante, calcular $\operatorname{sen}(x/2)$, $\cos(x/2)$ e $\operatorname{tg}(x/2)$.

25. Calcule $y = \frac{1}{\operatorname{sen} 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

26. Calcular $\operatorname{sen} 3x$ em função de $\operatorname{sen} x$.

27. Prove que $4 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen} 3x$.

28. Mostre que $\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} 10^\circ$.

29. Obtenha um polinômio de coeficientes inteiros que admita $\operatorname{sen} 10^\circ$ como raiz. Determine as outras raízes e prove que $\operatorname{sen} 10^\circ$ não pode ser escrito na forma p/q, onde p e q são inteiros, ou seja, é um número irracional.
Sugestão: use o exercício 26.

30. Prove que

a) $\text{sen}\, x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y)]$

b) $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

c) $\text{sen}\, x \cdot \text{sen}\, y = -\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

31. Prove que

a) $\text{sen}\, a + \text{sen}\, b = 2 \cdot \text{sen}\, \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$

b) $\text{sen}\, a - \text{sen}\, b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \text{sen}\, \frac{a-b}{2}$

c) $\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$

d) $\cos a - \cos b = -2 \cdot \text{sen}\, \frac{a+b}{2} \cdot \text{sen}\, \frac{a-b}{2}$.

32. Mostre que $\text{sen}\, 20° + \text{sen}\, 40° = \text{sen}\, 80°$.

33. Mostre que $\text{sen}\, x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

34. Mostre que em todo triângulo ABC, $\text{sen}\, 2A + \text{sen}\, 2B + \text{sen}\, 2C = 4\, \text{sen}\, A \cdot \text{sen}\, B \cdot \text{sen}\, C$.

35. Determine a natureza do triângulo ABC (acutângulo, retângulo ou obtusângulo; equilátero isósceles ou escaleno) no qual:

a) $\text{sen}^2 \hat{A} = \text{sen}^2 \hat{B} + \text{sen}^2 \hat{C}$

b) $\text{sen}\, \hat{A} = 2\, \text{sen}\, \hat{B} \cos \hat{C}$

c) $\text{sen}\, \hat{A} = \text{sen}\, \hat{B} + \text{sen}\, \hat{C}$

d) $\text{sen}\, \hat{B} + \cos \hat{C} = \cos \hat{B} + \text{sen}\, \hat{C}$

e) $\text{sen}\, \hat{B} \cdot \text{sen}\, \hat{C} = \cos^2 \frac{\hat{A}}{2}$

f) $\text{sen}\, 2\hat{A} \cdot \text{sen}\, \hat{B} = \text{sen}\, \hat{A} \cdot \text{sen}\, 2\hat{B}$

g) $\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} = 1$

36. Mostre que $\dfrac{\text{sen}\, 30° + \text{sen}\, 40° + \text{sen}\, 50°}{\cos 30° + \cos 40° + \cos 50°} = \text{tg}\, 40°$.

37. Determine os valores máximo e mínimo de

a) $y = \text{sen}\, x + \cos x$

b) $y = \text{sen}\, x + \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{9}\right)$

38. Mostre que $\text{tg}\, 20° \cdot \text{tg}\, 30° \cdot \text{tg}\, 40° = \text{tg}\, 10°$.

39. Mostre que se $ABCDEFG$ é um heptágono regular convexo então $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

40. As distâncias de um ponto P aos lados AC e BC de um triângulo ABC são m e n. Mostre que, supondo P interior ao triângulo,

$$\overline{CP}^2 = (m^2 + n^2 + 2mn \cdot \cos \hat{C}) \cdot \text{cosec}^2\, \hat{C}.$$

41. Um balão foi visto simultaneamente de três estações A, B e C sob ângulos de elevação de $45°$, $45°$ e $60°$, respectivamente. Sabendo que A está $3\,km$ a oeste de C e que B está $4km$ ao norte de C, determine a altura do balão.

42. Para determinar a distância entre dois pontos A e B situados além de um rio, marcaram-se dois pontos C e D aquém do rio e mediram-se os ângulos $\widehat{ACB} = 35°, \widehat{BCD} = 20°, \widehat{ADC} = 18°, \widehat{ADB} = 41°$ e a distância $\overline{CD} = 320m$. Calcular a distância $\overline{AB}$.

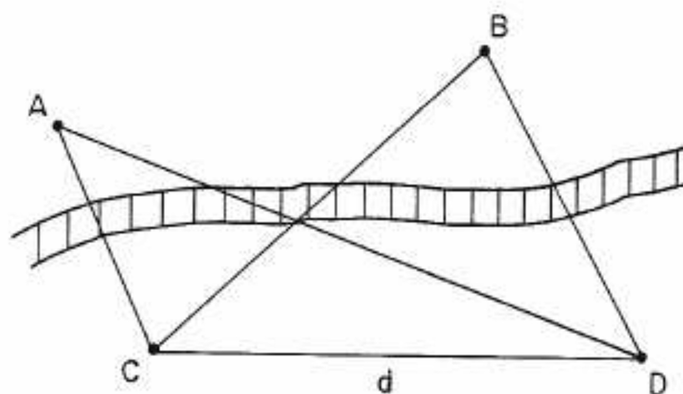


Figura 61

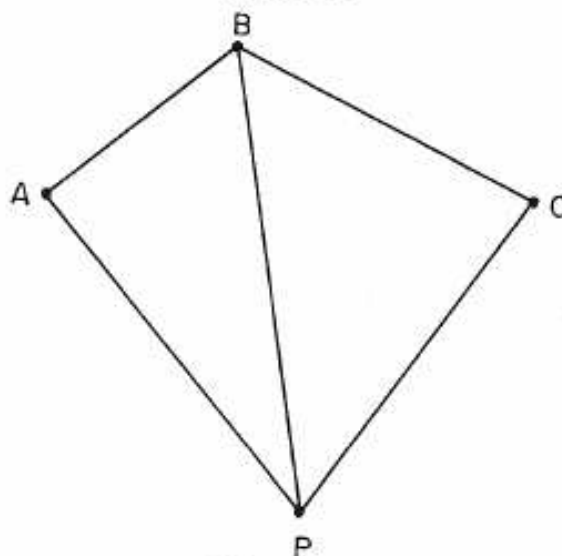


Figura 62

43. No quadrilátero $PABC$ da figura 62 conhecem-se $\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 5, \widehat{ABC} = 60°, \widehat{APB} = 20°$ e $\widehat{BPC} = 26°$. Calcular $\overline{PA}, \overline{PB}$ e $\overline{PC}$.

44. Um observador O situado no topo de uma montanha vê dois outros A e B situados no nível do mar. Os observadores A e B medem os ângulos α e β que as linhas AO ee BO formam com o plano horizontal e o observador O mede o ângulo $\widehat{AOB} = r$. Conhecendo a distância $\overline{AB} = d$, calcule a altura da montanha.

45. Mostre que a distância d entre o incentro e o circuncentro de um triângulo é dada por $d = R^2 - 2Rr$ (fórmula de Euler) onde R e r são os raios dos círculos circunscrito e inscrito. Conclua que em qualquer triângulo, $R \geq 2r$. (Incentro e circuncentro são os centros dos círculos inscrito e circunscrito, respectivamente. O primeiro é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos e o segundo é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados.)
Sugestão: Considere um triângulo ABC, seu incentro I e seu circuncentro O. Trace o diâmetro DE do círculo circunscrito perpendicular a BC (A e D estão de um mesmo lado da reta BC). Prove que $\overline{EI} = \overline{EC} = \overline{EB}$, observe que o triângulo ECD é retângulo e portanto $\overline{EC}^2 = 2R(R-r)$ e aplique a lei do cosseno no triângulo OEI.

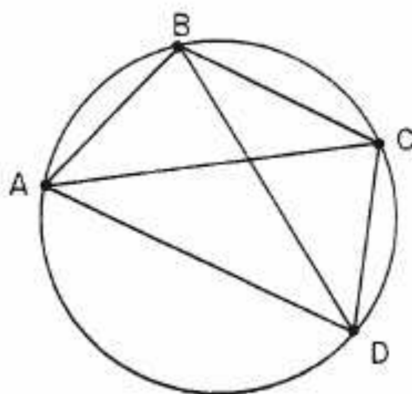


Figura 63

46. O Teorema de Ptolomeu (v. notas históricas) diz que em um quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos. Na figura 63, este teorema se exprime da seguinte forma:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

a) Demonstre este teorema considerando um ponto E sobre AC tal que $\widehat{ABE} = \widehat{CBD}$ e verificando que os triângulos ABE e DBC são semelhantes e que os triângulos ADB e EBC também são.

b) Considerando o caso em que AD é o diâmetro, mostre que do Teorema de Ptolomeu decorre a fórmula

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a.$$

Sugestão: Observe que se em um círculo de raio R temos um arco $\overset{\frown}{AB} = 2a$, traçando um diâmetro por A, obtemos que o comprimento da corda AB é $\overline{AB} = 2R \operatorname{sen} a$.

47. Mostre que a lei dos senos pode ser escrita

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R,$$

onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

48. De um triângulo ABC são dados os ângulos A, B e C e o perímetro $2p = a + b + c$. Obtenha as expressões abaixo que permitem calcular os lados a, b e c em função dos elementos dados.

$$a = \frac{p \operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}, \quad b = \frac{p \operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}, \quad c = \frac{p \operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}.$$

49. Prove que, dado o triângulo ABC, tem-se:

a) $1 - \cos A = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$, onde $p = \frac{a+b+c}{2}$

b) $1 + \cos A = \frac{2p(p-a)}{bc}$

c) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (fórmula de Heron), onde S é a área de ABC.

d) $S = \frac{abc}{4R}$, onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo.

50. Prove que, dado o triângulo ABC, tem-se

a) $\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

b) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

c) $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$

d) $\frac{b-c}{a} = \frac{\operatorname{sen}\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$

e) $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\text{sen}\,\frac{C}{2}}$

51. Mostre que se h_A, h_B e h_C são as alturas de um triângulo ABC,

a) $h_A = 2R\,\text{sen}\,B \cdot \text{sen}\,C$, onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo.

b) $\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} = \frac{1}{r}$ onde r é o raio do círculo inscrito no triângulo.

52) Mostre que no triângulo ABC,

a) $\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$,

b) $\text{sen}\,\frac{A}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{B}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$ e mostre ainda que $\text{sen}\,\frac{A}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{B}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

5. Equações trigonométricas

Neste capítulo, vamos examinar algumas equações trigonométricas. Elas aparecem naturalmente na solução de problemas de Geometria quando a incógnita escolhida é um ângulo. Se, por exemplo, de um triângulo retângulo conhecemos a hipotenusa a e a soma dos catetos s, para calcular algum outro elemento dessa figura, podemos colocar x para um dos ângulos. Teremos então $\operatorname{sen} x + \cos x = s/a$, que é uma equação trigonométrica. Os métodos usados para resolver as equações mais comuns estão nas seções seguintes.

1. As equações fundamentais

As equações fundamentais são: $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a, \cos x = \cos a$ e $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$. Examinemos cada uma delas.

a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$

Para que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ é necessário e suficiente que as extremidades dos arcos x e a coincidam ou que sejam simétricas em relação ao eixo das ordenadas (figura 64). No primeiro caso, x será côngruo a a e no segundo caso, x será côngruo a $\pi - a$. Portanto, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ equivale a $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$.

Por exemplo, os valores de x para os quais $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x$ são os valores para os quais $3x = x + 2k\pi$ ou $3x = \pi - x + 2k\pi$, isto é, $x = k\pi$ ou $x = \pi/4 + k\pi/2$.

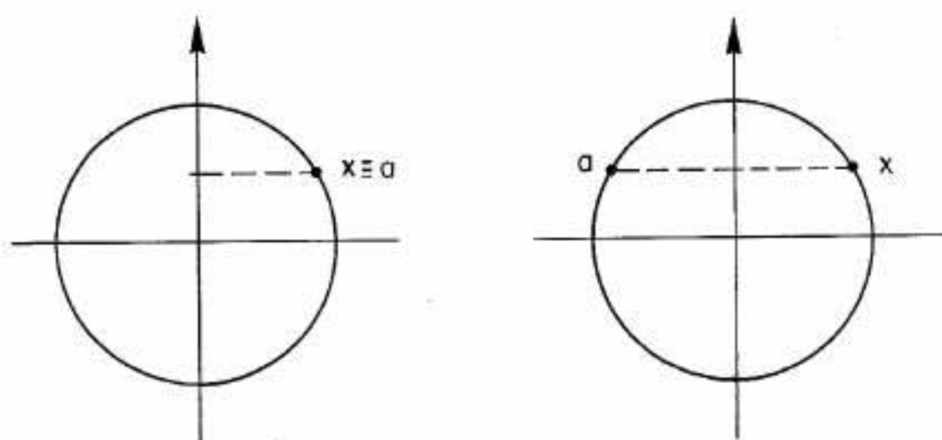


Figura 64

Dado agora um real $m, -1 \leq m \leq 1$, existe um único y no intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ tal que $\operatorname{sen} y = m$. Chamaremos este real y de $\operatorname{arc\,sen} m$ (arco seno m) logo, arc sen é a função inversa do seno no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (figura 65). Portanto, $y = \operatorname{arc\,sen} m$ equivale a $\operatorname{sen} y = m$ e $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Por exemplo, $\operatorname{arc\,sen} 1 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ e $\operatorname{arc\,sen}(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3$.

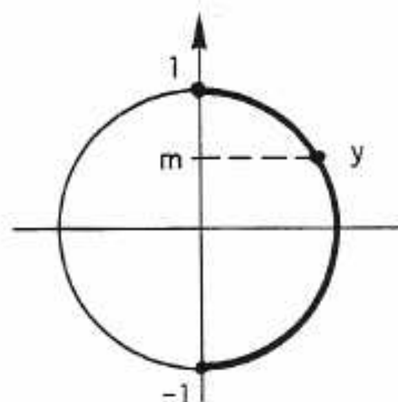


Figura 65

b) $\cos x = \cos a$

Para que $\cos x = \cos a$ é necessário e suficiente que as extremidades dos arcos x e a coincidam ou sejam simétricas em relação ao eixo das abscissas. Teremos portanto $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$. Agora, se m é um real do intervalo $[-1, 1]$, a função inversa do cosseno, $\operatorname{arc\,cos} m$, é definida como o único real y do intervalo $[0, \pi]$ tal que $\cos y = m$. Portanto, $y = \operatorname{arc\,cos} m$ equivale a $\cos y = m$ e $0 \leq y \leq \pi$.

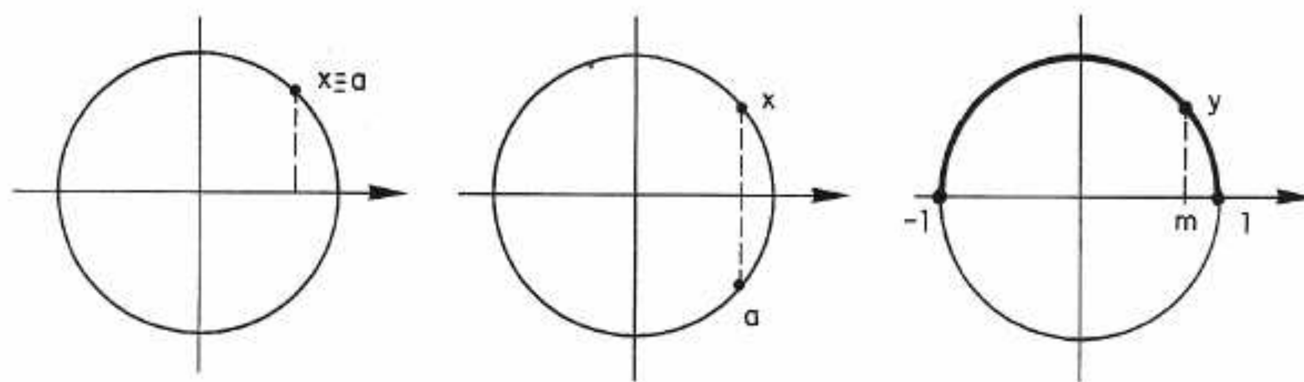


Figura 66

c) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$

Para que $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$, com $a \neq \pi/2 + k\pi$, é necessário e suficiente

que as extremidades dos arcos x e a coincidam ou sejam simétricas em relação à origem. Teremos portanto $x = a + k\pi$. A função inversa da tangente, arc tg m, é definida para todo real m como o único y do intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\operatorname{tg} y = m$. Então, $y = \operatorname{arc\,tg} m$ equivale a $\operatorname{tg} y = m$ e $-\pi/2 < y < \pi/2$.

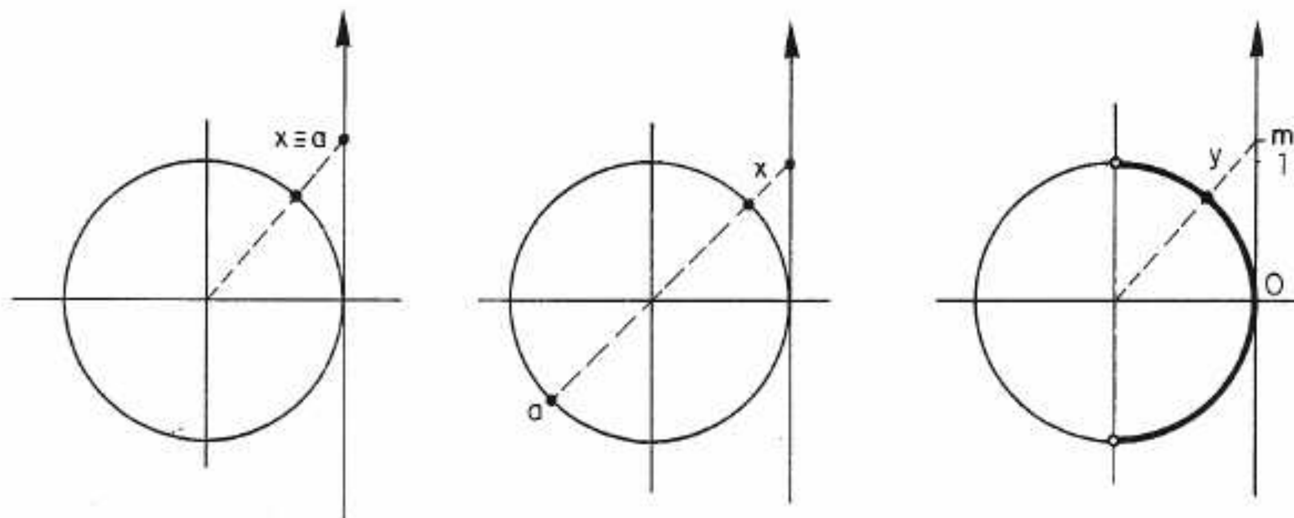


Figura 67

2. A equação $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$

A equação $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$ pode ser resolvida por três processos. O primeiro (que achamos ser o melhor) consiste em dividir a equação por $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ que é diferente de zero. A equação então toma a forma

$$\frac{a}{r} \operatorname{sen} x + \frac{b}{r} \cos x = \frac{c}{r}.$$

Como $(\frac{a}{r})^2 + (\frac{b}{r})^2 = 1$, existe um real α tal que $\operatorname{sen} \alpha = a/r$ e $\cos \alpha = b/r$. Teremos então

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} x + \cos \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{r}$$

ou seja, $\cos(x - \alpha) = c/r$, que é de fácil resolução.

O segundo processo, consiste em introduzir a incógnita auxiliar $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (veja capítulo 4). A equação $a \cdot \operatorname{sen} x + b \cdot \cos x = c$, toma então a forma

$$a \cdot \frac{2t}{1+t^2} + b \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = c \text{ ou}$$
$$(b+c)t^2 - 2at + b + c = 0,$$

que é uma equação do segundo grau em t. Aqui, um cuidado deve ser tomado. Ao empregarmos esse método, devemos verificar se há soluções da forma $x = \pi + 2k\pi$. Como $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ não existe, tais soluções não apareceriam por esse método.

O terceiro processo que pode ser empregado, consiste em elevar ao quadrado os dois membros da equação $a \cdot \operatorname{sen} x = c - b \cos x$ para obter

$$a^2(1 - \cos^2 x) = (c - b \cos x)^2.$$

Teremos então uma equação do segundo grau em $\cos x$ e também aqui um outro cuidado deve ser tomado. O fato de elevar ao quadrado pode ter introduzido raízes estranhas, ou seja, podem aparecer soluções que não sejam da equação original. Há necessidade então de testar as soluções encontradas na equação dada. Vamos, por exemplo, resolver a equação $\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x = 1$ pelos três processos.

a) Dividindo por 2 a equação dada obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \cdot \cos x = \frac{1}{2} \text{ ou} \\
&\operatorname{sen} x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cdot \cos x = \frac{1}{2} \text{ ou} \\
&\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Como vimos na seção anterior, devemos ter $x - \pi/6 = \pi/6 + 2k\pi$ ou $x - \pi/6 = \pi - \pi/6 + 2k\pi$ e as soluções da nossa equação são portanto da forma

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi.$$

b) Para usar a incógnita auxiliar $t = \operatorname{tg} x/2$, observemos que $x = \pi$ é solução da equação dada. Todos os valores de x da forma $\pi + 2k\pi$ são também soluções e não aparecerão no método que usaremos agora porque para esses valores de x (e somente para eles) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ não existe. Fazendo as substituições

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1 + t^2} \text{ e } \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

na equação dada obteremos $t = 1/\sqrt{3}$, ou seja, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$. Porém, pelo que vimos na seção **1c** deste capítulo, esta equação equivale a $x/2 =$

$\pi/6 + k\pi$ ou seja,

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

c) Escrevendo a equação dada na forma

$$\sqrt{3}\,\text{sen}\,x = 1 + \cos x$$

e elevando ao quadrado obtemos

$$3(1 - \cos^2 x) = 1 + 2\cos x + \cos^2 x \text{ ou}$$
$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

que resolvida dá $\cos x = -1$ ou $\cos x = 1/2$. Como elevamos ambos os membros ao quadrado devemos testar as soluções encontradas. Substituindo $\cos x$ por -1 na equação, encontramos $\text{sen}\,x = 0$ e consequentemente $x = \pi + 2k\pi$. Substituindo $\cos x$ por $1/2$, encontramos $\text{sen}\,x = \sqrt{3}/2$ e portanto $x = \pi/3 + 2k\pi$.

3. Equações envolvendo funções inversas

Nesta seção mostraremos apenas um exemplo de equação envolvendo funções inversas com sua solução. Consideremos então a equação

$$\text{arc cos}\,x + \text{arc cos}\,2x = \frac{\pi}{3}.$$

Para resolver, façamos $\text{arc cos}\,x = \alpha$ e $\text{arc cos}\,2x = \beta$, onde $0 \leq \alpha \leq \pi$ e $0 \leq \beta \leq \pi$. Temos então $\cos\alpha = x$ e $\cos\beta = 2x$ e $\alpha + \beta = \pi/3$. Ora, $\alpha + \beta = \pi/3$ implica (mas não é equivalente a) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\pi/3$, ou seja, $\cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta = 1/2$. Temos portanto,

$$x \cdot 2x - \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - 4x^2} = \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

A equação acima é equivalente a

$$2x^2 - \frac{1}{2} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - 4x^2)}$$

que resolvida dá $x = \pm\frac{1}{2}$.

Observemos que a equação $(*)$ não é equivalente à original. Por isso, uma verificação se faz necessária. Se $x = 1/2$, teremos, na equação dada, $\text{arc cos}\,1/2 + \text{arc cos}\,1 = \pi/3 + 0 = \pi/3$. Entretanto, se $x = -1/2$ encontramos $\text{arc cos} -1/2 + \text{arc cos} -1 = 2\pi/3 + \pi \neq \pi/3$. Portanto,

$x = 1/2$ é a única solução.

Exercícios

1. Resolva as equações:

a) $\cos 3x = \cos x$;
b) $\operatorname{sen} 2x = \cos x$;
c) $\operatorname{tg} 7x = \operatorname{tg} 3x$;
d) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 3x = 1$;
e) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 1$;
f) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$;
g) $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$;
h) $\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x = 1$;
i) $\operatorname{sen} x = \sqrt{3}(\sec x - \cos x)$;
j) $\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x = \cos x$;
k) $5 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x \cos x + 4 \cos^2 x = 3$;
l) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$;
m) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

2. Sendo A e B reais não simultaneamente nulos, determine para que valores de C a equação $A \operatorname{sen} x + B \cos x = C$ possui solução.

3. Determine os valores de m para os quais a equação $6(m-1) \operatorname{sen}^2 x - (m-1) \operatorname{sen} x - m = 0$ possui solução.

4. Calcule

a) $\operatorname{sen}(2 \operatorname{arc\,sen} x)$;
b) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sen} x)$;
c) $\cos[\operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg} 3]$;
d) $4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$;
e) $\operatorname{arc\,tg}(-x) + \operatorname{arc\,tg} x$.

5. Construa os gráficos de:

a) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$;
b) $f(x) = \operatorname{arc\,cos} x$;
c) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$;
d) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,cos} x$;
e) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$;
f) $f(x) = \operatorname{arc\,cos}(\operatorname{sen} x)$;

g) $f(x) = \cos(\text{arc sen}\, x)$;
h) $f(x) = \text{sen}(\text{arc sen}\, x)$.

6. Resolva as equações:
a) $\text{arc sen}\, x + \text{arc sen}\, 2x = \frac{\pi}{6}$
b) $\text{arc tg}\, \frac{x+1}{2} + \text{arc tg}\, \frac{1-x}{2} = \frac{\pi}{4}$
c) $\text{arc sen}\, x\sqrt{3} = \text{arc sen}\, 2x - \text{arc sen}\, x$

7. Resolva as equações
a) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$;
b) $\text{sen}\, x + \text{sen}\, 3x + \text{sen}\, 9x = \text{sen}\, 5x$;
c) $\cos 4x \cdot \cos 2x = \cos 3x \cdot \cos x$.

8. Determine o máximo e o mínimo das funções abaixo e construa seus gráficos
a) $f(x) = 3\,\text{sen}\, x - 4\cos x$;
b) $f(x) = 3\,\text{sen}^2\, x + 4\cos^2 x$.

9. Em um triângulo retângulo de hipotenusa 1, a soma dos catetos é $\sqrt{6}/2$. Calcular a razão entre o menor cateto e o maior cateto.

10. Um retângulo está inscrito em um semi-círculo de raio 1 tendo um de seus lados (base) sobre o diâmetro. Calcular a razão entre a altura e a base desse retângulo nas duas situações seguintes:
a) a área do retângulo é máxima.
b) o perímetro do retângulo é máximo.

11. Em um círculo de raio 1, AA' é um diâmetro e BC é uma corda perpendicular a AA'. Determinar os ângulos do triângulo ABC, sabendo que a soma dos quadrados de seus lados é 5.

12. Resolver as inequações:
a) $2\,\text{sen}^2\, x + 7\,\text{sen}\, x + 3 \leq 0$;
b) $\cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}\, x \leq 1$.

13. Uma partícula P percorre, em sentido anti-horário, o círculo de centro na origem e raio a, partindo, no instante $t = 0$, do ponto S (figura 68). Sua velocidade angular, constante, é w radianos por segundo (isto é, em cada segundo ela percorre um arco de w radianos).

Seja Q a projeção ortogonal da partícula no eixo das abscissas. O movimento do ponto Q é dito um *movimento harmônico simples* e o ângulo

ϕ indicado na figura é chamado *ângulo de fase*.

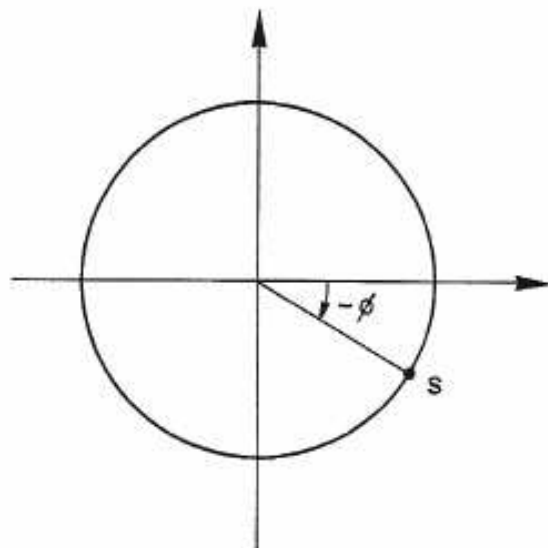


Figura 68

a) Determine a posição do ponto Q no instante t segundos.
b) Determine a amplitude (isto é, o afastamento máximo da origem) do movimento de Q.
c) Verifique que o movimento harmônico simples é periódico e determine seu período.
d) Determine a freqüência (isto é, o número de períodos por segundo) do movimento harmônico.

14. Uma partícula se movimenta sobre o eixo das abscissas de modo que sua abscissa no instante t segundos é

$$x = \text{sen}(\pi t) - \sqrt{3}\cos(\pi t). \text{ (distancias em metros)}$$

Mostre que o movimento da partícula é harmônico simples (v. Exercício 13) e determine a amplitude, o ângulo de fase, o período e a freqüência deste movimento.

15. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são constantes dadas,

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x),$$

e x_1, x_2 são reais tais que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Prove que $x_2 - x_1 = m\pi$ para algum inteiro m.

6. Números complexos

1. Introdução

Iniciaremos lembrando que as operações de soma e produto de números reais possuem um certo número de propriedades fundamentais, que são as seguintes:

1) A adição e a multiplicação são *comutativas*, isto é, se a e b são números reais, então

$$a + b = b + a, \quad ab = ba.$$

2) A adição e a multiplicação são *associativas*, isto é, se a, b e c são números reais,

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc).$$

3) A multiplicação é *distributiva* relativamente à adição, isto é, se a, b e c são números reais,

$$a(b + c) = ab + ac.$$

4) Existem e são únicos os números 0 e 1 satisfazendo às condições:

$$a + 0 = a, \quad a1 = a,$$

para todo real a.

5) A todo real a corresponde um único número real $(-a)$, e se $a \neq 0$, um único número real $\frac{1}{a}$, tais que

$$a + (-a) = 0 \quad \text{e} \quad a\left(\frac{1}{a}\right) = 1.$$

A razão pela qual estas propriedades são consideradas fundamentais, é que a partir delas podemos deduzir todas as regras de operações aritméticas sobre os números reais. Por exemplo, de (4), decorre que $(-1)1 = -1$ e de $(3), (4)$ e (5) decorre que $a + a0 = a(1 + 0) = a1 = a$, isto é, $a0 = 0$.

A famosa "regra dos sinais": $(-1)(-1) = 1$ pode também ser dedu-

zida das propriedades acima. Basta observar que

$$(-1)(-1)+(-1) = (-1)(-1)+(-1)\cdot 1 = (-1)\{(-1)+1\} = (-1)0 = 0$$

e portanto

$$(-1)(-1) + (-1) + 1 = 1,$$

donde

$$(-1)(-1) = 1.$$

Decorre daí que o quadrado $a^2 = aa$ de um número real a nunca é negativo. Em outras palavras, no conjunto dos números reais não é possível extrair a raiz quadrada de um número negativo.

Os números complexos nascem desta impossibilidade. Queremos dispor de um conjunto de objetos, que chamaremos números complexos, que possam ser somados e multiplicados e nos quais seja possível extrair a raiz quadrada de um número negativo. É claro que queremos também que os reais sejam objetos deste conjunto e que as operações de adição e multiplicação quando feitas sobre reais, dêem o mesmo resultado que as operações que já conhecemos.

Existem muitas maneiras de definir o conjunto dos números complexos. Adotaremos a seguinte:

Os *números complexos* constituem um conjunto $\mathbb{C}$, onde estão definidas operações de adição (indicado pelo sinal $+$) e de multiplicação (indicado pela simples justaposição de letras) com as propriedades (1), (2), (3), (4) e (5). Além disso, os números reais estão incluídos em $\mathbb{C}$ e:

a) Existe um número complexo i com $i^2 = -1$.

b) Todo número complexo pode ser escrito de uma maneira única na forma $a + bi$, onde a e b são reais (a é chamado *parte real* e b é chamado *parte imaginária* do complexo $a + bi$). Usa-se a notação $\text{Re}(a + bi) = a$ e $\text{Im}(a + bi) = b$.

Usando as propriedades de (1) a (5), podemos operar com complexos de maneira análoga à que operamos com reais, com o cuidado de tomar $i^2 = -1$.

Por exemplo,

$$(5 + 3i) + (8 + 5i) = 5 + 8 + (3 + 5)i = 13 + 8i$$

$$(7 + 2i)(4 + 3i) = 7(4 + 3i) + 2i(4 + 3i) = 28 + 21i + 8i + 6i^2 =$$
$$= 28 - 6 + (21 + 8)i = 22 + 29i.$$

Observe que, de (b), decorre que os complexos da forma $a + 0i$ são números reais. Além disso, se $a + bi = c + di$, concluímos pela unicidade de (b) que $a = c$ e $b = d$, isto é, se dois complexos são iguais então as suas partes reais e imaginárias são iguais. Convém usar uma letra $z = a + bi$ para indicar um número complexo.

Da definição adotada, decorre que podemos pensar no número complexo $z = a + bi$ como o ponto (a, b) do plano cujas coordenadas são a e b, ou ainda como o *vetor* (isto é, o segmento orientado) de origem na origem O do sistema de coordenadas e extremidade (a, b), isto é, o complexo z é representado pelo vetor $\overrightarrow{Oz}$ (figura 69).

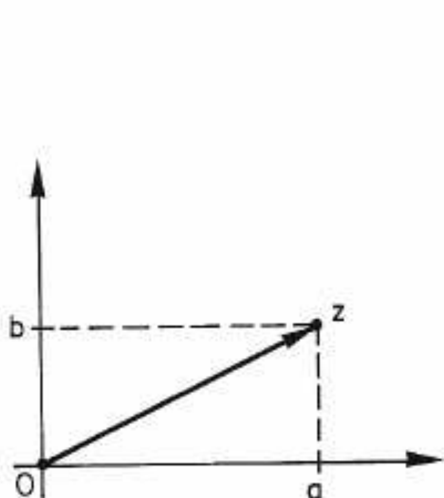


Figura 69

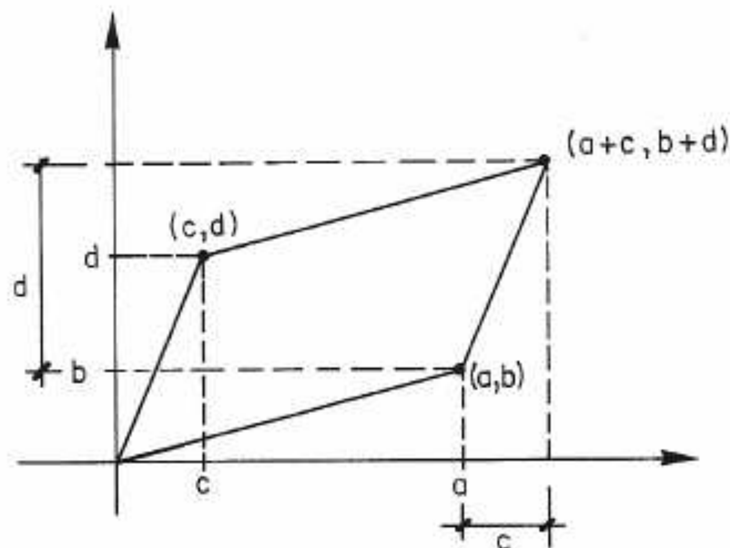


Figura 70

No primeiro caso, o ponto (a, b) é chamado de *imagem* do complexo $z = a + bi$ e no último caso, os números a e b são chamados *componentes* do vetor $\overrightarrow{Oz}$.

Vamos ver como se traduzem as operações de soma e produto, quando pensamos nos complexos como vetores do plano. Usando as propriedades de (1) e (5) obteremos:

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Em outras palavras, a soma de dois complexos é representada por um vetor, cujas componentes são as somas das componentes dos vetores dados. Isto significa, como se vê pela figura 70, que a soma é representada geometricamente pela diagonal do paralelogramo construído sobre os ve-

tores dados. Uma interpretação geométrica da multiplicação é um pouco mais complicada e terá que esperar pela representação trigonométrica dos complexos.

É também conveniente interpretar a diferença de dois complexos z_1 e z_2. Temos, observando a figura 71,

$$\overrightarrow{Oz_1} + \overrightarrow{z_1z_2} = \overrightarrow{Oz_2} \text{ ou}$$

$$\overrightarrow{z_1z_2} = \overrightarrow{Oz_1} - \overrightarrow{Oz_1},$$

isto é, o vetor que representa a diferença $z_2 - z_1$ é o vetor $\overrightarrow{z_1z_2}$.

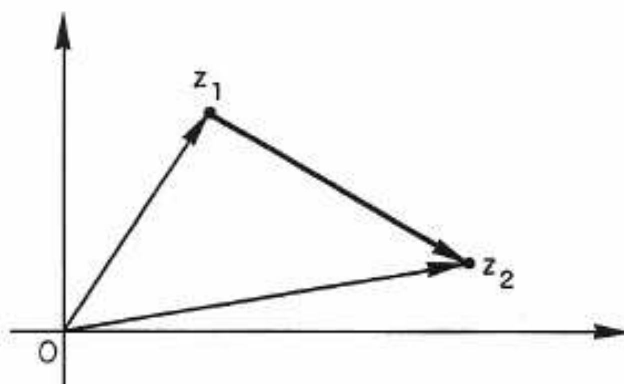


Figura 71

2. Módulos e conjugados

Dado um número complexo $z = a+bi$, sabemos por (5) que se $z \neq 0$, deve existir um complexo $\frac{1}{z}$ tal que $z\frac{1}{z} = 1$. Vamos determinar o complexo $1/z$ na forma $c + di$.

Para isto, convém definir o *conjugado* de um número complexo $z = a+bi$ como o número complexo $\bar{z} = a-bi$. Geometricamente, o conjugado $\bar{z}$ de z é representado pelo simétrico de z relativamente ao eixo Ox (figura 72).

Dado um número $z = a + bi$, chama-se *módulo* de $z(|z|)$ ao número real não negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Geometricamente, $|z|$ mede a distância de O a z, ou seja, mede o módulo do vetor que representa o complexo z, como se vê facilmente pelo Teorema de Pitágoras.

Observe que uma relação entre os dois conceitos acima é obtida do seguinte modo

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2;$$

isto é, o produto de um complexo z pelo seu conjugado é igual ao quadrado do módulo de z.

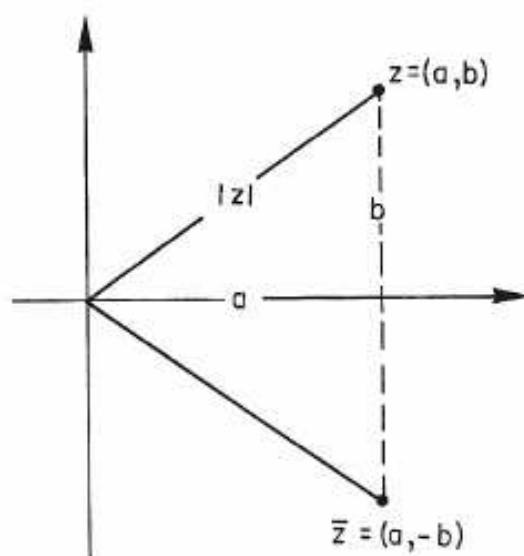


Figura 72

Agora voltemos ao problema de determinar $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$. A solução é simples e dada por

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

isto é,

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Por exemplo, se $z = 1 + 3i$, então

$$\frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i}{1+9} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i.$$

Da mesma maneira que para números reais, dados dois complexos z_1 e $z_2 \neq 0$, definimos o *quociente* z_1/z_2 como sendo o produto $z_1\left(\frac{1}{z_2}\right)$. Na prática, convém não procurar lembrar a expressão de $\frac{1}{z_2}$ e efetuar a divisão multiplicando ambos os membros pelo conjugado do denominador.

Por exemplo, se $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 1 + 5i$, teremos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{1+5i} = \frac{(3+2i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)}$$
$$= \frac{3+10+2i-15i}{1+25} = \frac{13-13i}{26} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

A operação de passar ao conjugado de um número complexo possui algumas propriedades úteis, que resumimos na proposição abaixo.

Proposição. *Se z_1 e z_2 são números complexos, então*

a) $(\overline{z_1 z_2}) = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

b) $(\overline{z_1 + z_2}) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

Demonstração: Escreva-se $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$; então

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(bc + ad),$$
$$\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - i(bc + ad).$$

Por outro lado, $\bar{z}_1 = a - bi, \bar{z}_2 = c - di$, e, portanto,

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - i(bc + ad) = \overline{z_1 z_2},$$

o que demonstra (a).

A demonstração de (b) é mais fácil, e será deixada como um exercício.

Corolário:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

Demonstração:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 =$$
$$= |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2.$$

Como módulos são positivos ou nulos, podemos extrair a raiz quadrada de ambos os membros da expressão acima e obter $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. C.Q.D.

Exercícios

1. Verifique as seguintes igualdades:

a) $\sqrt{2} - i - i(1 - i\sqrt{2}) = -2i$.

b) $(2 - 3i)(-2 + i) = -1 + 8i$.

c) $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{1}{2}i$.

d) $\frac{1+2i}{3+4i} + \frac{2-i}{5i} = \frac{6-8i}{25}$.

e) $\overline{\bar{z} + 3i} = z - 3i$.

f) $\frac{\overline{(2+i)^2}}{3-4i} = 1$.

2. Escreva as expressões abaixo na forma $a + bi$

a) $(4 - i) + i - (6 + 3i)i$.

b) $(7 + 4i)(2 - 3i) + (6 - i)(2 + 5i)$.

c) $\frac{3-i}{4+5i}$.

d) $\frac{(2-i)^2}{(3+i)^2}$.

e) $2 + 6i - (\overline{5 + 3i})$.

f) $(3 + 2i)(\overline{2 - 3i})$.

g) $(\overline{4 - i})(\overline{1 - 4i})$.

3. Calcule i^2, i^3, i^4, i^5, e observe que as potências começam a se repetir depois de i^4. Comprove este fato, mostrando que $i^{4n+r} = i^r$ e aplique este resultado para calcular:

a) i^{20}.

b) i^{72}.

c) $i^{1.041}$.

d) $(1 + i)^{12}$.

e) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$.

f) $1 + i + i^2 + \cdots + i^{1992}$.

4. Escreva na forma $a + bi$:

a) $18i^5 + 7i^{10} - (2i)^4$.

b) $(2 - 3i)^5$.

c) $(1 + 2i)^7$.

5. Sendo n inteiro, que valores pode ter $i^n + i^{-n}$?

6. Determine a real para que $\frac{a+i}{1+ai}$ seja real.

7. Um imaginário puro é um complexo cuja parte real é nula. Determine a real para que $\frac{2+ai}{1-i}$ seja um imaginário puro.

8. Desenhe o vetor correspondente a cada um dos complexos abaixo e calcule o seu módulo.

$z_1 = 3 + 2i,$

$z_2 = 4 - i,$

$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i,$

$z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$

$z_5 = 3 - 2i.$

Desenhe o vetor correspondente à soma $z_1 + z_2$ e $z_1 + z_5$. Observe que $z_1 + z_5$ é um número real.

9. Prove que:

a) $\bar{\bar{z}} = z$

b) z é real se e só se $z = \bar{z}$

c) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

d) $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$

e) se $z \neq 0, \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

f) se $z \neq 0, \overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$

g) se $z \neq 0, \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

h) se $z \neq 0, \left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$

i) se $|z| = 1$ então $\frac{1}{z} = \bar{z}$

j) se $\frac{1}{z} = \bar{z}$ então $\bar{z} = 1$.

10. Dada a equação do segundo grau $x^2 + 2bx + c = 0$ onde b e c são números reais, verifica-se facilmente que as suas raízes (isto é, os valores de x que satisfazem à equação acima) são:

$$x_1 = -b + \sqrt{b^2 - c} \quad \text{e} \quad x_2 = -b - \sqrt{b^2 - c}.$$

Se só dispusermos de números reais, pode não ser possível efetuar a operação $\sqrt{b^2 - c}$. Entretanto, usando complexos, toda equação do segundo grau tem duas raízes. Achar as raízes complexas de:

a) $x^2 + 9 = 0.$

b) $x^2 + 2x + 6 = 0.$

c) $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}.$

d) $\frac{z^2}{6} = \frac{z}{2} - \frac{2}{3}$.

11. Determine as raízes quadradas de

a) -4

b) $3 - 4i$

c) i

12. Prove que:

a) $\overline{z + \bar{z}}$ é um número real.

b) A parte real de $z - \bar{z}$ é zero.

13. Se $z + \frac{1}{z} = 1$, calcule $|z|$.

14. Sendo a real, determine $\left|\frac{1-ai}{1+ai}\right|$.

15. Mostre que $|z_1 - z_2|$ é a distância entre as imagens dos complexos z_1 e z_2 no plano complexo.

16. Prove que para todo complexo z, $\text{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $\text{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

17. Determine os complexos que têm o quadrado igual ao conjugado.

18. Resolva a equação $iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0$.

19. Resolva os sistemas de equações onde z e w são complexos:

a) $\begin{cases} z + wi = i, \\ iz + w = 2i - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} iz + (1+i)w = 1, \\ (1+i)\bar{z} - (6+i)\bar{w} = -4 - 8i \end{cases}$

20. Prove que se z é uma raiz da equação

$$a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

de coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reais, então $\bar{z}$ é também uma raiz desta equação.

21. $P(z)$ é um polinômio de coeficientes reais e $P(1-i) = 2 + 3i$. Determine $P(1+i)$.

22. Sabendo que $1 - i$ é raiz da equação $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 10x + 2 = 0$, achar todas as suas raízes.

23. Prove que $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. Interprete o resultado geometricamente.

24. Determine o conjunto das imagens dos complexos z tais que:

a) $\text{Re}(z) = 2$

b) $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$

c) $1 \leq \text{Im}(z) \leq 4$

d) $|z| = 1$

e) $z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$

f) $|z - z_0| = a^2$ onde z_0 é um complexo dado e a é um real positivo dado

g) $z + \frac{1}{z}$ é real

h) $\text{Re}(z^2) = 1$

i) $|z + i| + |z - i| = 2$

j) $|z + i| + |z - i| = 1$

k) $\text{Re}\left(\frac{z+i}{z-1}\right) = 0$

l) $|z + 1| = 2|z|$

m) $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| \leq 1$

25. Calcule z sabendo que $|z| = |1 - z| = \left|\frac{1}{z}\right|$.

26. Determine os valores máximo e mínimo de $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|$ quando $|z| = 3$.

27. Determine os valores máximo e mínimo de $|z + i|$ quando $|z - 2| = 1$.

28. Prove que:

a) $\text{Re}(z) \leq |z|$

b) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (desigualdade triangular)

c) $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Interprete geometricamente b) e c).

29. Sob que condições se tem

a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$?

b) $|z_1 + z_2| = ||z_1| - |z_2||$?

30. $|z| = 3$ e $|w| = 4$. O que se pode afirmar sobre $|z + w|$?

31. Sob que condições se tem $|z+w| = |z-w|$? Interprete geometricamente o resultado.

32. Prove que se $|z| = |w| = 1$ e $1 + zw \neq 0$ então $\frac{z+w}{1+zw}$ é real.

33. O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos pode também ser definido da seguinte maneira: $\mathbb{C}$ é o conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais x e y, onde se definem operações de soma e produto por:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Prove que:

a) A soma e o produto satisfazem às propriedades $(1), (2)$ e (3) mencionadas no texto para números reais.

b) Os complexos da forma $(x, 0)$ que indicaremos por x, formam um subconjunto $R \subset \mathbb{C}$ que é tal que a soma e o produto de dois elementos de R pertencem a R.

c) Definido um número complexo i por $i = (0, 1)$, verifica-se a relação: $i^2 = -1$.

d) Todo complexo (x_1, y_1) pode ser escrito na forma: $(x_1, y_1) = x_1 + y_1 i$.

7. Trigonometria e números complexos

Um número complexo $z = a + bi$ pode ser pensado como um ponto do plano, de coordenadas (a, b) ou como um vetor $\overrightarrow{Oz}$, de origem O e extremidade (a, b). A representação $z = a + bi$ dá ênfase às coordenadas do ponto z. Uma representação que dá ênfase aos elementos geométricos do vetor $\overrightarrow{Oz}$ é obtida do modo seguinte:

Indiquemos por $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ o comprimento de $\overrightarrow{0z}$ que suporemos diferente de zero, e por θ o ângulo positivo xOz (figura 73).

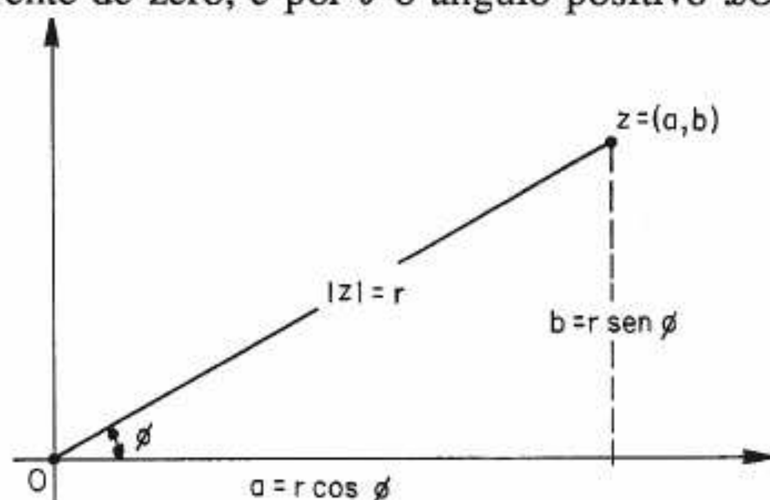


Figura 73

Então

$$\frac{a}{r} = \cos\theta, \quad \frac{b}{r} = \operatorname{sen}\theta$$

isto é,

$$\begin{aligned} z = a + bi &= r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta i \\ &= r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \end{aligned}$$

onde os elementos geométricos r e θ do vetor $\overrightarrow{Oz}$ estão destacados. A representação $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ é chamada a *forma trigonométrica* do complexo z.

Observe-se que substituindo θ na expressão acima por $\theta + 2k\pi$, onde k é um inteiro positivo, negativo ou nulo, o complexo z não se altera. Em

muitos casos é conveniente usar esta expressão mais geral:

$$z = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\,\text{sen}(\theta + 2k\pi))$$

e dizer que os valores de $\theta + 2k\pi$ são os *argumentos* de z.

Por exemplo, se $z = 3 + 3i$, temos

$$|z| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2},$$

e portanto

$$\frac{a}{r} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{b}{r} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Como $\cos\theta = \text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, temos que $\theta = \pi/4$, donde

$$z = 3\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}),$$

que pode também ser escrita como

$$z = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right).$$

A forma trigonométrica dos complexos, permite obter uma interpretação geométrica da operação de multiplicação de complexos, que trataremos agora.

Primeiro faremos a seguinte observação. Se x é um número qualquer, então

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\,\text{sen}\,x,$$
$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = +\cos x.$$

Com efeito, os triângulos OPP_1 e OQQ_1 da figura 74 são iguais por terem ângulos iguais e os lados $|OP| = |OQ|$. Portanto, em valor absoluto,

$$\left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |QQ_1| = |PP_1| = |\text{sen}\,x|$$
$$\left|\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |OQ_1| = |OP_1| = |\cos x|.$$

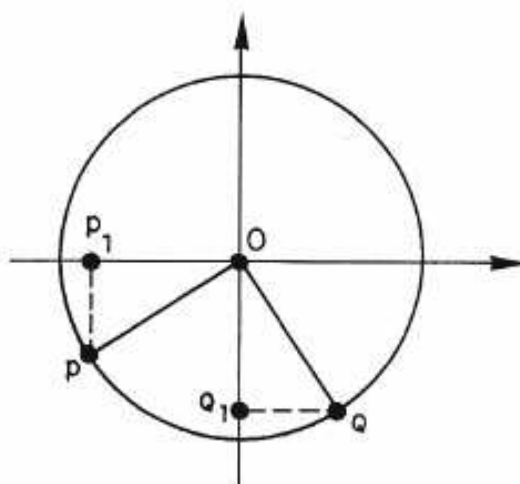


Figura 74. $\widehat{AP} = x$ e $\widehat{AQ} = x + \frac{\pi}{2}$

As relações acima estão portanto demonstradas em valor absoluto. Como x e $x + \frac{\pi}{2}$ estão sempre em quadrantes adjacentes, obteremos os sinais indicados. Observe que embora a figura tenha sido feita no 3º quadrante, a demonstração é válida em qualquer quadrante.

Vamos, de início, interpretar geometricamente a multiplicação de dois complexos unitários, isto é, de módulo 1. Ora, um complexo unitário $w_1 = \cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1$ é representado por um ponto do círculo unitário S^1. Como

$$iw_1 = i(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) = -\operatorname{sen}\theta_1 + i\cos\theta_1 = \\ = \cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right),$$

concluímos que multiplicar w_1 por i significa efetuar no ponto w_1 uma rotação positiva de $\frac{\pi}{2}$. Seja agora $w_2 = \cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2$ um outro complexo unitário. Então

$$w_1 w_2 = (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)w_1 = \cos\theta_2 w_1 + \operatorname{sen}\theta_2 i w_1,$$

isto é, o vetor que representa $w_2 w_1$ é a soma (diagonal do paralelogramo) dos vetores perpendiculares $\cos\theta_2 w_1$ e $\operatorname{sen}\theta_1 i w_1$. Tomando um sistema de coordenadas xOy, cujo eixo Ox coincide com $O\omega_1$ (ver figura 75), obteremos que o ângulo de w_1 com $w_2 w_1$ é θ_2.

Concluímos daí que multiplicar dois complexos unitários w_1 e w_2 significa, geometricamente, dar a um deles uma rotação positiva de ângulo igual ao ângulo do outro.

No caso dos complexos não serem unitários, escreveremos $z_1 =$

$r_1 w_1, z_2 = r_2 w_2$, com $|w_1| = |w_2| = 1$, e o produto será simplesmente

$$z_1 z_2 = r_1 w_1 r_2 w_2 = r_1 r_2 w_1 w_2.$$

Em outras palavras, efetua-se o produto dos complexos unitários correspondentes, como acima, e multiplica-se o resultado pelo número real $r_1 r_2$.

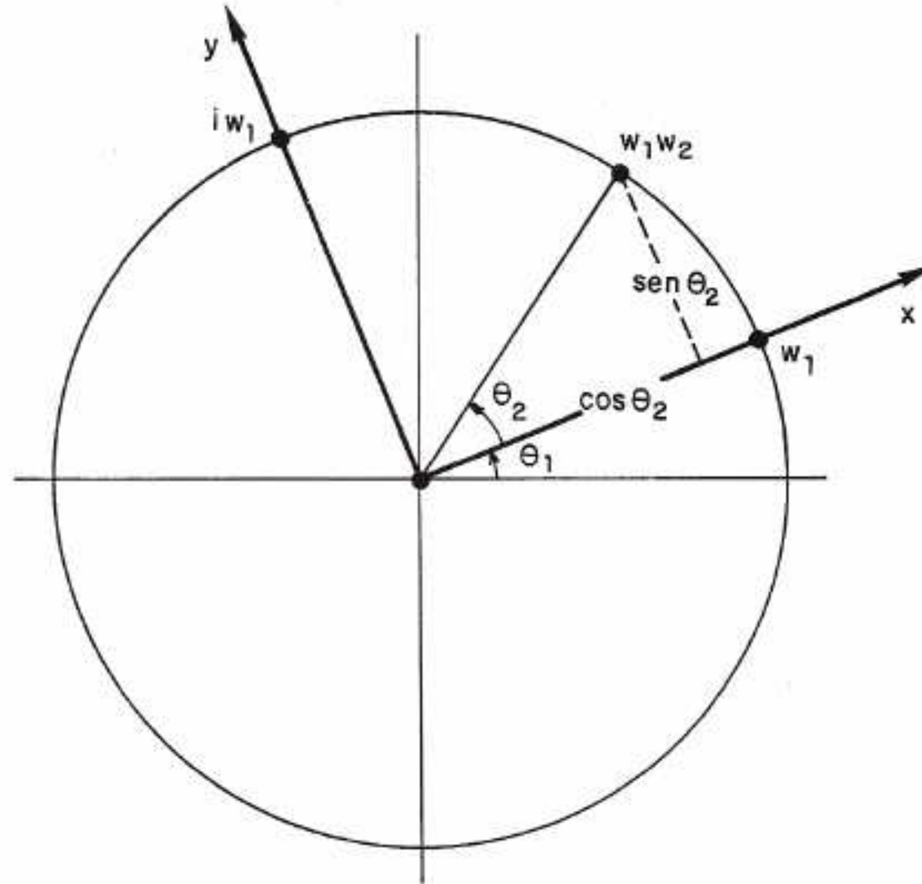


Figura 75

A conseqüência mais importante da interpretação que acabamos de estabelecer é a seguinte proposição, que pode ser considerada como o teorema fundamental da Trigonometria (uma outra demonstração destas fórmulas pode ser encontrada no Cap. 4).

Teorema (fórmulas de adição da Trigonometria.) *Se x e y são reais quaisquer:*

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \tag{1}$$

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x \tag{2}$$

Demonstração. Se x e y satisfazem à condição:

$$0 \leq x < 2\pi, \quad 0 \leq y < 2\pi,$$

escreveremos

$$w_1 = \cos x + i \operatorname{sen} x, \quad w_2 = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Pela interpretação geométrica do produto, $w_1 w_2$ é obtido de w_1 dando-lhe uma rotação positiva de ângulo y. Portanto

$$w_1 w_2 = \cos(x+y) + i \operatorname{sen}(x+y). \tag{3}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} w_1 w_2 &= (\cos x + i \operatorname{sen} x)(\cos y + i \operatorname{sen} y) = \\ &= (\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) + i(\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x). \end{aligned} \tag{4}$$

igualando as partes reais e imaginárias de (3) e (4), obtemos

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \\ \operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x, \end{aligned}$$

o que demonstra o teorema neste caso.

Se x e y são quaisquer, achamos números inteiros k e l, tais que

$$0 \leq x + 2k\pi = x' < 2\pi, \quad 0 \leq y + 2l\pi = y' < 2\pi.$$

Por definição, $\cos x = \cos x'$, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x'$, $\cos y = \cos y'$, $\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} y'$. Além disso, é imediato que $\cos(x+y) = \cos(x'+y')$ e $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x'+y')$. Como as relações estão demonstradas para x' e y', segue-se que elas são verdadeiras para x e y. C.Q.D.

Do teorema fundamental da Trigonometria decorre um grande número de identidades trigonométricas. Algumas delas aparecerão nos exercícios. Em geral, não vale a pena tentar memorizar outras identidades, além das fundamentais. As únicas fórmulas que devem ser mantidas em mente são:

$$\begin{aligned} &\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1, \\ &\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x, \text{ se } \cos x \neq 0, \\ &\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \\ &\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x, \end{aligned}$$

todo o resto podendo ser deduzido daí. As duas últimas, em verdade, podem ser obtidas rapidamente, lembrando que elas são a parte real e imaginária de um produto de números complexos unitários.

Uma outra conseqüência imediata da interpretação geométrica do produto de números complexos é a seguinte expressão, conhecida sob o nome de *Fórmula de De Moivre*:

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx),$$

onde n é o inteiro positivo. Geometricamente, a fórmula acima significa que multiplicar o complexo unitário $\cos x + i \operatorname{sen} x$ por si próprio n vezes equivale a dar-lhe n rotações sucessivas de ângulo x.

Uma das utilidades da fórmula de De Moivre é permitir a determinação de $\cos nx$ e $\operatorname{sen} nx$, sem o uso das fórmulas de adição.

Por exemplo, para calcular $\cos 3x$, escreveremos

$$\begin{aligned}\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x &= (\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 = \\ &= \cos^3 x + 3\cos x i^2 \operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x i \operatorname{sen} x + i^3 \operatorname{sen}^3 x = \\ &= \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x + i(3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x).\end{aligned}$$

Igualando as partes reais e imaginárias, obtemos:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x,$$
$$\operatorname{sen} 3x = 3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x.$$

Outra utilidade da fórmula de De Moivre é a determinação de raízes de números complexos.

Por exemplo, vamos achar as raízes cúbicas de $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Primeiro, escreveremos o número complexo na forma trigonométrica: $z = \cos(30° + k360°) + i \operatorname{sen}(30° + k360°)$, onde k é um inteiro (positivo, negativo ou nulo), tomando o cuidado de incluir todas as determinações do argumento de z. É claro que qualquer complexo da forma

$$w_k = \cos\left(\frac{30° + k360°}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{30° + k360°}{3}\right)$$

é uma raiz de z, pois, pela fórmula de De Moivre, $(w_k)^3 = z$. Os possíveis valores de w_k são:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \cos 10° + i \operatorname{sen} 10°, && k = 0,\\
w_1 &= \cos 130° + i \operatorname{sen} 130°, && k = 1,\\
w_2 &= \cos 250° + i \operatorname{sen} 250°, && k = 2,\\
w_3 &= \cos(10° + 360°) + i \operatorname{sen}(10° + 360°) = w_0, && k = 3.
\end{aligned}$$

Observe que a partir de $w_3 = w_0$ as raízes começam a se repetir. Além disso, usando os valores negativos de k, verificamos facilmente que, para $k = -1$, obtemos w_2, para $k = -2$, obtemos w_1, e a partir daí recomeça a repetição. Concluímos então que existem exatamente três raízes cúbicas de z, a saber, w_0, w_1, w_2, que se distribuem como na figura 76, formando entre si ângulos de 120°.

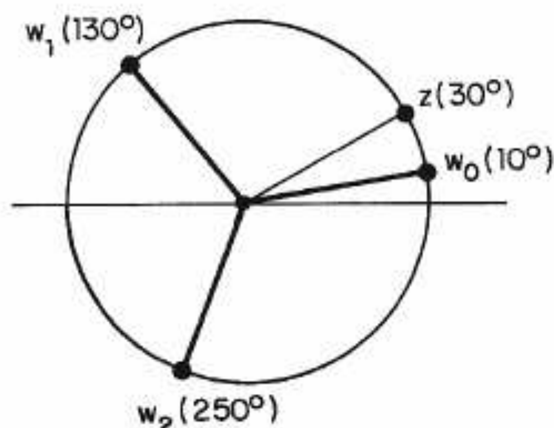


Figura 76

O raciocínio acima apresentado é inteiramente geral. Com efeito, se $z = \cos(\theta + k2\pi) + i\,\text{sen}(\theta + k2\pi)$, então o complexo w_k é uma raiz n-ésima de z se e só se w_k é da forma

$$w_k = \cos\left(\frac{\theta + k2\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + k2\pi}{n}\right).$$

Procedendo como acima, vê-se que os valores $k = 0, 1, \ldots, n-1$, dão raízes $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ distintas, correspondentes a ângulos

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n},$$

respectivamente. Para os valores restantes, $k = n$, $n+1, \ldots$, os ângulos começam a se repetir dando

$$\frac{\theta}{n} + \frac{2}{\pi},\ \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} + 2\pi, \cdots$$

respectivamente. Além disso, os valores negativos de k não fornecem nada além das raízes já obtidas. Conclui-se então que um número complexo possui exatamente n raízes de ordem n.

Em particular, o número 1 é um número complexo e possui, por exemplo, cinco raízes de ordem 5. Vamos calculá-las.

Primeiro escreveremos 1 na forma trigonométrica:

$$1 = \cos(k360^\circ) + i\,\text{sen}(k360^\circ).$$

Uma raiz quíntupla de 1 é da forma

$$w_k = \cos\left(\frac{k360^\circ}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{k360^\circ}{5}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Obteremos portanto os seguintes valores:

$$\begin{aligned} w_0 &= 1, \\ w_1 &= \cos(72^\circ) + i\,\text{sen}(72^\circ), \\ w_2 &= \cos(144^\circ) + i\,\text{sen}(144^\circ), \\ w_3 &= \cos(216^\circ) + i\,\text{sen}(216^\circ), \\ w_4 &= \cos(288^\circ) + i\,\text{sen}(288^\circ), \end{aligned}$$

que se distribuem sobre o círculo unitário, dividindo-o em cinco partes iguais (figura 77).

De maneira geral, as n raízes n-ésimas da unidade dividem o círculo unitário em n partes iguais.

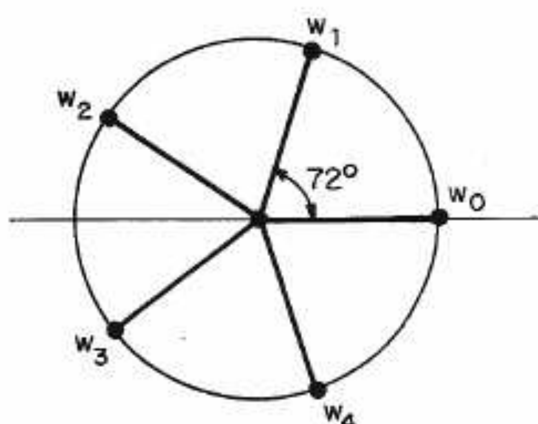


Figura 77

Finalmente, para concluir estas aplicações dos números complexos à Trigonometria vejamos uma outra forma de obter a Lei do Cosseno.

Proposição(Lei do cosseno.) *Em um triângulo A, B, C qualquer, temos que*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

onde a, b e c são os lados opostos aos vértices A, B eC, respectivamente.

Demonstração. Escolha-se um sistema de coordenadas $x0y$ de modo que A coincida com a origem 0 e $0B$ coincida com o eixo $0x$. Seja $z_1 = r_1$ o número complexo representado por B e $z_2 = r_2(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ o número complexo representado por C (figura 78). Então $|z_1 - z_2|^2 = a^2$ e

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - (z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2).$$

Como

$$z_2\bar{z}_1 = r_2(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)r_1,$$
$$z_1\bar{z}_2 = r_1 r_2(\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha),$$

temos

$$z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 = r_1 r_2(2\cos\alpha)$$

e portanto

$$|z_1 - z_2|^2 = a^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2r_1 r_2 \cos\alpha =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}, \qquad \text{C.Q.D.}$$

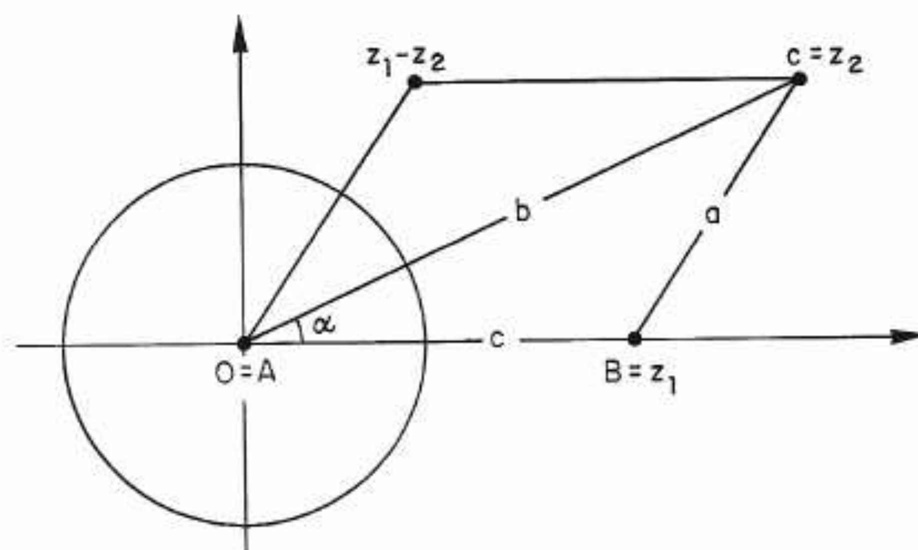


Figura 78

Os números complexos podem ser utilizados em problemas de Geometria que envolvam rotações. Por exemplo, consideremos o problema de determinar o vértice C do triângulo equilátero ABC onde são dados os vértices $A = (1, 2)$ e $B = (3, 5)$.

Há duas soluções, C_1 e C_2 (figura 79). O vetor $\overrightarrow{AC_1}$ é obtido quando giramos o vetor $\overrightarrow{AB}$ de 60° em torno de sua origem, ou seja

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB}(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ).$$

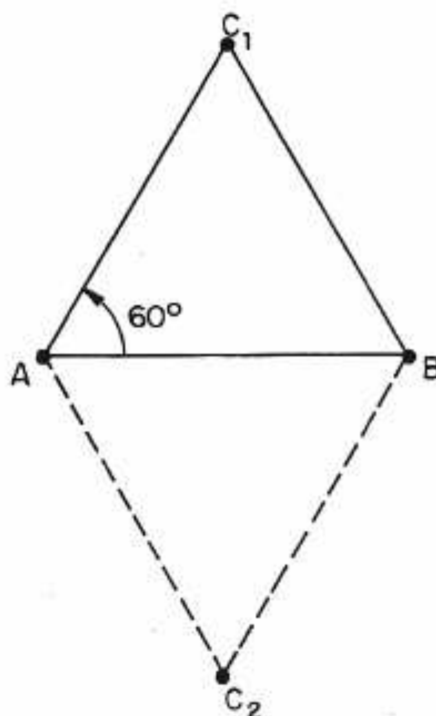


Figura 79

Se O é a origem do nosso sistema de coordenadas temos

$$\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ou}$$

$$\overrightarrow{OC_1} - (1+2i) = [(3+5i) - (1+2i)]\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

o que dá

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{4-3\sqrt{3}}{2} + i\frac{7+2\sqrt{3}}{2},$$

ou seja,

$$C_1 = \left(\frac{4-3\sqrt{3}}{2}, \frac{7+2\sqrt{3}}{2}\right).$$

A outra solução é obtida girando $\overrightarrow{AB}$ de $-60°$ em torno do ponto A.

Uma observação final.

Quando consideramos o círculo S^1 como um subconjunto

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$$

do plano complexo, a aplicação $E : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$, definida na Seção 3 do Capítulo 3 toma a forma $E(x) = \cos x + i \operatorname{sen} x$. Usando as fórmulas de adição (1) e (2), é fácil verificar que

$$\begin{aligned} E(x+y) &= \cos(x+y) + i \operatorname{sen}(x+y) \\ &= (\cos x + i \operatorname{sen} x)(\cos y + i \operatorname{sen} y) \\ &= E(x).E(y). \end{aligned}$$

Portanto, E é uma função complexa que se comporta como uma exponencial. Isto levou Euler (em homenagem a quem, indicamos a função acima por E) a propor a seguinte definição

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x. \tag{5}$$

No tempo de Euler, as funções complexas não eram bem entendidas, e a definição acima levantou várias controvérsias, principalmente por levar a conclusões inesperadas, tais como $e^{i\pi} = -1$ (que decorre de (5) fazendo $x = \pi$). Posteriormente, com um melhor conhecimento das funções complexas, verificou-se que a definição de Euler é a única possível, se quisermos manter para os complexos as propriedades válidas nos reais. Maiores detalhes sobre isto requerem considerações sobre funções complexas que não cabem neste texto.

Exercícios

1. Representar na forma trigonométrica

a) $1 + \sqrt{3}i$
b) $-1 + i$
c) -8
d) $-\sqrt{3} - i$
e) 5

2. Mostre que se $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ então $\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta))$.

3. Qual é a relação que liga os argumentos de $z_1 = 3 - 2i$ e $z_2 = -3 + 2i$?

4. Representar na forma trigonométrica

a) $\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$
b) $-\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$
c) $\operatorname{sen}\theta - i \cos\theta$

d) $1 + \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta (0 < \theta < \pi)$

5. Para que valores de n, inteiro positivo, $(1+i)^n$ é real?

6. Usando as fórmulas de adição, mostre que:

a) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

b) $\operatorname{tg}(x-y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$.

c) $\operatorname{sen}^2 x = -\dfrac{\cos 2x - 1}{2}$.

7. Sabendo que $\cos x = 4/5$ e $\cos y = 5/13$ e que x e y estão no primeiro quadrante, calcular:

a) $\cos(x+y)$.
b) $\cos(x-y)$.
c) $\operatorname{sen}(x+y)$.
d) $\operatorname{sen}(x-y)$.
e) $\operatorname{tg}(x+y)$.
f) $\operatorname{tg}(x-y)$.

8. Verifique as seguintes identidades:

a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$.

b) $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$.

c) $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.

d) $\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{sen} \dfrac{x-y}{2}$.

9. Mostre que $\operatorname{sen} 31^\circ + \operatorname{sen} 29^\circ = \operatorname{sen} 89^\circ$.

10. Determine a menor solução positiva da equação

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = \cos \frac{x}{2}.$$

11. Resolva a equação $\cos 3x + \operatorname{sen} 3x = \cos x + \operatorname{sen} x$.

12. Verifique as seguintes identidades, para $x \neq (2n+1)\pi$, que provam a proposição: *"as funções trigonométricas podem ser expressas racionalmente (isto é, sem envolver radicais) em função da tangente da metade do arco"*.

a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$.

b) $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$.

c) $\operatorname{tg} x = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$.

13. Demonstrar as identidades:

a) $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos 2x}\cdot\dfrac{\cos x}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

b) $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x$.

c) $\operatorname{sen} x\cos x(1+\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{ctg} x) = 1+\operatorname{sen} 2x$.

d) $\operatorname{cosec} 2x + \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} x$

e) $\dfrac{\sec x + 1}{\sec x - 1} = (\operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x)^2$

14. De um triângulo ABC são dados os ângulos A, B, C e o perímetro $2p = a + b + c$. Obtenha as expressões abaixo, que permitem calcular os lados a, b, c em função dos elementos dados.

a) $a = \dfrac{p\operatorname{sen}\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$,

b) $b = \dfrac{p\operatorname{sen}\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}}$,

c) $c = \dfrac{p\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A}{2}}$.

15. Prove que, se em um triângulo a seguinte relação

$$\operatorname{sen} A = \frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos B + \cos C}$$

é verificada, então o triângulo é retângulo.

16. Prove que a área S de um triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,A = \frac{1}{2}ac\,\text{sen}\,B = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,C.$$

17. determine os complexos z tais que $z^3 = \overline{z}$.

18. Se $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, calcule

a) z^6

b) $1 + z + z^2 + \cdots + z^{47}$

19. Resolva as equações

a) $z^3 = i$

b) $z^4 = -16$

c) $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$

d) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$

e) $(z+1)^n = (z-1)^n$

20. Determine o complexo x sabendo que as imagens de z, i e iz são vértices de um triângulo equilátero.

21. Supondo $0 < \theta < \pi$ escreva na forma trigonométrica o complexo

$$\frac{1 + \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta}{1 + \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta}.$$

22. No triângulo ABC onde a, b e c são os lados opostos aos ângulos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente, demonstre que

$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C} \qquad \text{(Lei dos senos).}$$

Sugestão: Considere complexos z_1, z_2 e z_3 cujas imagens são os vértices do triângulo e use a identidade

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_1} + \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_1} + 1 = 0.$$

23. $ABCD$ é um quadrado. Dados $A = (1, 2)$ e $B = (3, 5)$ determine C e D (duas soluções).

24. Dois vértices consecutivos de um octógono regular convexo são $(1, 2)$ e $(3, -2)$. Determine o centro do octógono.

25. Determine o conjunto das imagens dos complexos z para os quais $\dfrac{z-1}{z+1}$ é:

a) real
b) imaginário puro.

26. Um antigo mapa dava instruções para localizar um tesouro enterrado em certa ilha...

"Ande da palmeira até a entrada da caverna. Lá chegando, vire 90° à direita e caminhe o mesmo número de passos. No fim desse trajeto coloque uma marca e retorne à palmeira. Agora, caminhe em direção à pedra. Lá chegando, vire 90° à esquerda e caminhe o mesmo número de passos que foram dados da palmeira à pedra. Coloque uma marca no fim desse trajeto. O tesouro está no ponto médio das duas marcas."

Quando chegamos à ilha, a palmeira não existia mais. Como fazer para achar o tesouro?

27. Considere os conjuntos: $A = \{z \in \mathbb{C} | Re(z) = Im(z)\}$ e $B = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) \geq 0 \text{ e } |z| = 1\}$. Determine as imagens de A e B pelas funções:

a) $f(z) = \bar{z}$
b) $f(z) = z + 2 + i$
c) $f(z) = 2z$
d) $f(z) = iz$
e) $f(z) = (1 + i)z$
f) $f(z) = z^2$

28. Mostre que se z_1, z_2 e z_3 são vértices de um triângulo equilátero então $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$.

29. Sejam $A = \{z \in \mathbb{C} | z^m = 1\}$ e $B = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$. Mostre que $A \cap B = \{z \in \mathbb{C} | z^d = 1\}$ onde $d = MDC(m, n)$.

30. Se $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\alpha$, prove que $x^n + \dfrac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$.

31. Resolver a equação trigonométrica:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

32. Mostre que 72° é o menor ângulo positivo que satisfaz simultaneamente às equações:

$$\begin{cases} 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0 \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x = 0 \end{cases}$$

33. Observando o desenvolvimento de $(1+i)^n$ calcule o valor da soma $S = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$

34. Observando o desenvolvimento de $(1+\epsilon)^n$, onde ϵ é uma raiz cúbica da unidade, e C_n^k é o número de combinações simples de classe k de n elementos distintos, calcule os valores das somas:

a) $S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots$
b) $S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots$
c) $S_3 = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots$

35. Determine os valores das somas:

a) $S_1 = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen}(a+r) + \operatorname{sen}(a+2r) + \cdots + \operatorname{sen}(a+nr)$,
b) $S_2 = \cos a + \cos(a+r) + \cos(a+2r) + \cdots + \cos(a+nr)$.

36. Seja $A_1A_2A_3\dots A_n$ um polígono regular convexo inscrito no círculo unitário. Provar que

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} \dots \overline{A_1A_n} = n.$$

37. Existe uma fórmula chamada de Fórmula de Cardano (matemático italiano da época da Renascença) que fornece as raízes da equação do terceiro grau; $y^3 + ay + b = 0$. A fórmula é a seguinte:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Resolver usando a Fórmula de Cardano:

Seja v o volume de um cubo de aresta x, e v' o volume de um paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3, e cuja altura é igual a x. Determinar x de modo que $v = v' + 1$.

Observação: A importância deste problema é que para achar uma raiz real positiva, isto é, que resolve efetivamente o problema, é necessário usar números complexos. A história da Fórmula de Cardano, exemplos de sua

aplicação e referências adicionais pode ser encontrado em [**3**], páginas 16 a 33.

38. Admitindo a fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$:

a) Calcule $e^{2\pi i}$;

b) Calcule $e^{\pi i/4}$;

c) Prove que

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

e que

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$$

d) Calcule $e^{\pi i/2}$ e conclua que $i^i = e^{-\pi/2}$.

8. Apêndice A

Transformações nas funções trigonométricas

Conhecendo os gráficos das funções trigonométricas, passamos a mostrar que transformações sofrem esses gráficos quando algumas modificações simples são feitas nas funções. Por exemplo, como será o gráfico da função

$$y = -3\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1?$$

Estas modificações feitas na função seno, referem-se a três conhecidas palavras: simetria, translação e dilatação (ou compressão). O efeito de cada uma delas será mostrado nas figuras seguintes onde consideraremos uma função f, de domínio $\mathbb{R}$ e apenas uma parte do seu gráfico.

Simetria

a) Em relação ao eixo X (figura 80)

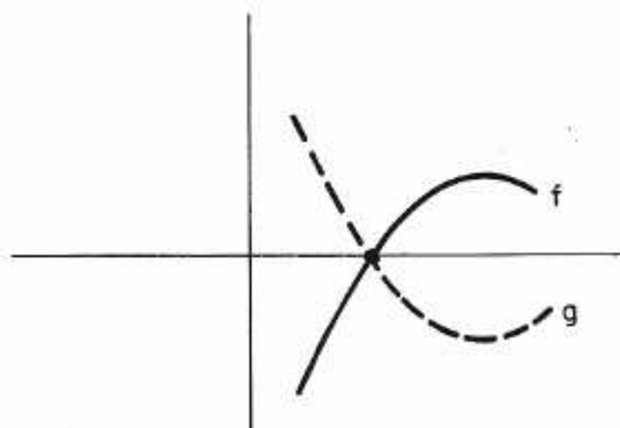


Figura 80 – $g(x) = -f(x)$

b) Em relação ao eixo Y (figura 81)

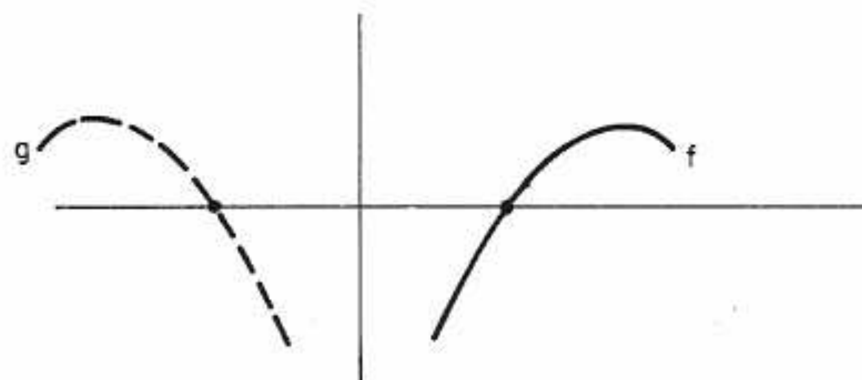


Figura 81 – $g(x) = f(-x)$

Translação

a) Horizontal (figura 82)

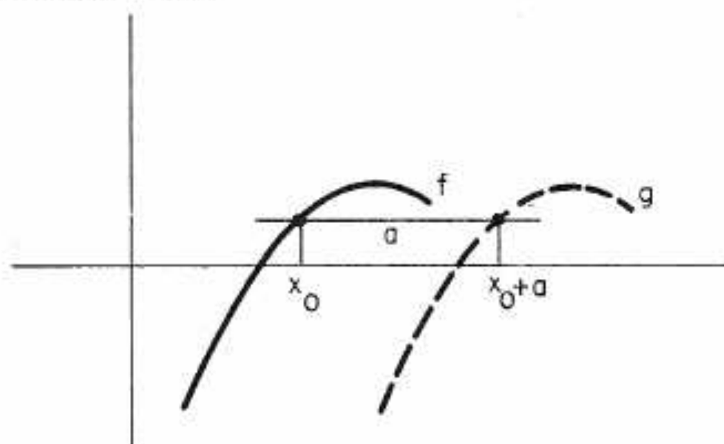


Figura 82 – $g(x) = f(x - a), a > 0$

b) Vertical (figura 83)

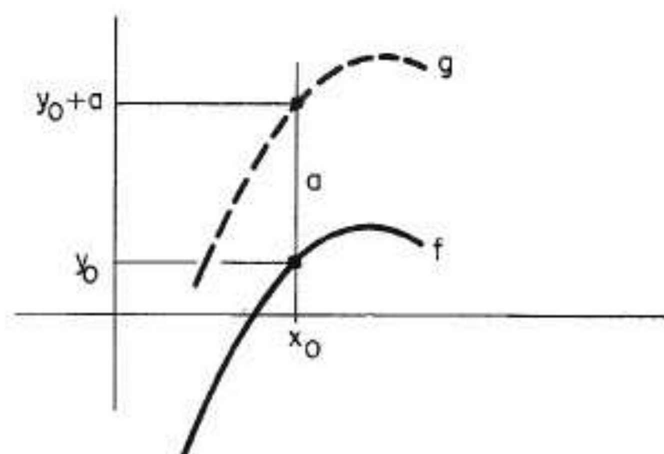


Figura 83 - $g(x) = f(x) + a, a > 0$

Dilatação (ou Compressão)

a) Horizontal (figura 84)

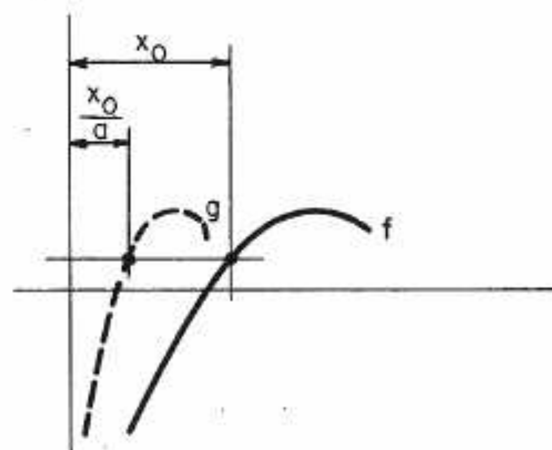


Figura 84 – $g(x) = f(ax), \ \ a > 0$

Repare que $g\left(\frac{x_0}{a}\right) = f\left(a\frac{x_0}{a}\right) = f(x_0)$. Se $a > 1$ esta transformação é uma compressão e se $0 < a < 1$ uma dilatação.

b) Vertical (figura 85)

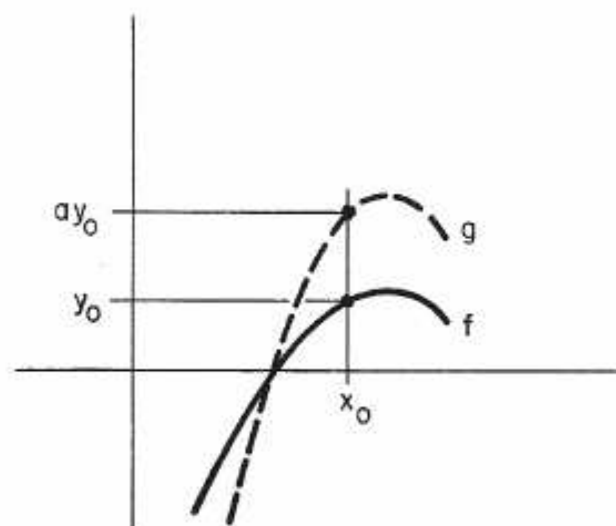


Figura 85 – $g(x) = af(x), \ \ a > 0$

Se $a > 1$ esta transformação é uma dilatação e se $0 < a < 1$ uma compressão.

As funções trigonométricas são periódicas. Simetrias e translações, naturalmente, não modificam os períodos. A dilatação vertical também não, mas a dilatação horizontal muda os períodos. Vamos mostrar que se f é função periódica com período p e se $g(x) = f(ax), a > 0$, então g tem período $\frac{p}{a}$.

De fato, se f tem período p então, para todo $x \in \mathbb{R}, f(x+p) = f(x)$.

Portanto,

$$g\left(x+\frac{p}{a}\right) = f\left[a\left(x+\frac{p}{a}\right)\right]$$
$$= f(ax+p)$$
$$= f(ax)$$
$$= g(x)$$

o que mostra que g tem período $\frac{p}{a}$. Observe então os seguintes exemplos.

Exemplo 1. Gráficos de $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ e $y = \operatorname{sen} 5x$.

a) $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$. Período $p = \frac{2\pi}{1/2} = \pi$

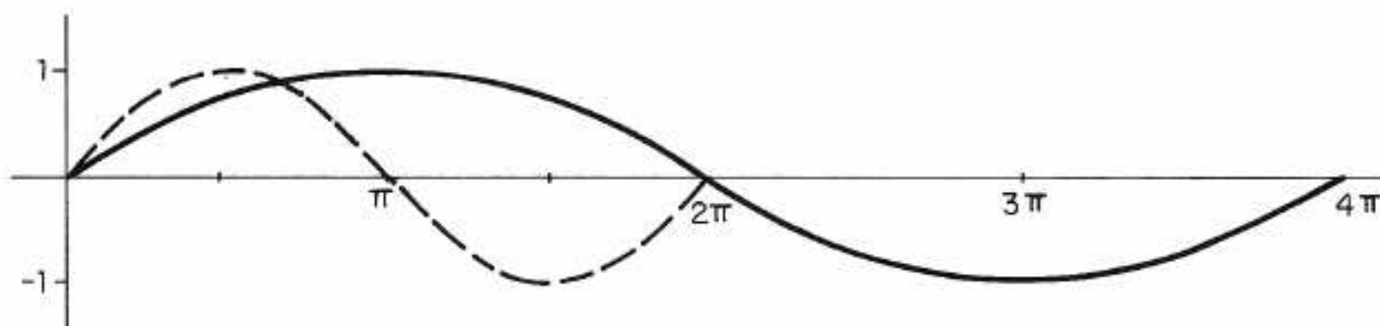


Figura 86

b) $y = \operatorname{sen} 5x$. Período $p = \frac{2\pi}{5}$.

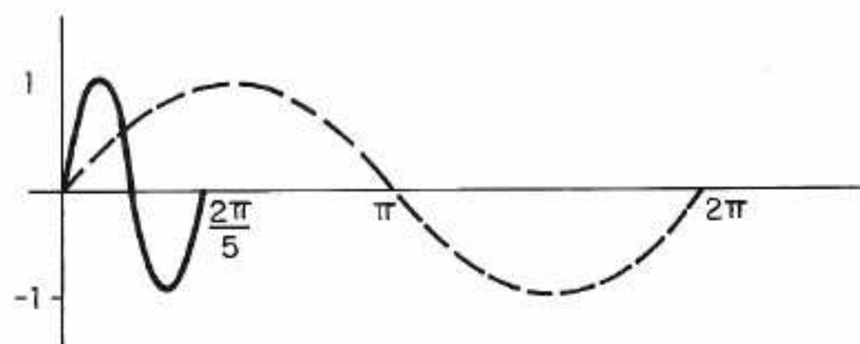


Figura 87

Exemplo 2. Gráfico de $y = -3 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

Escrevemos a função da seguinte forma:

$$y = -3 \operatorname{sen}\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] + 1.$$

Começamos desenhando o gráfico de $y = \operatorname{sen} 2x$, que possui período

π. Em seguida seguem-se as outras transformações:

$$y = \operatorname{sen} 2x$$

$$y = \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ Translação horizontal de } \frac{\pi}{6}$$

$$y = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ Dilatação vertical}$$

$$y = -3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ Simetria em relação ao eixo } X$$

$$y - 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \text{ Translação vertical}$$

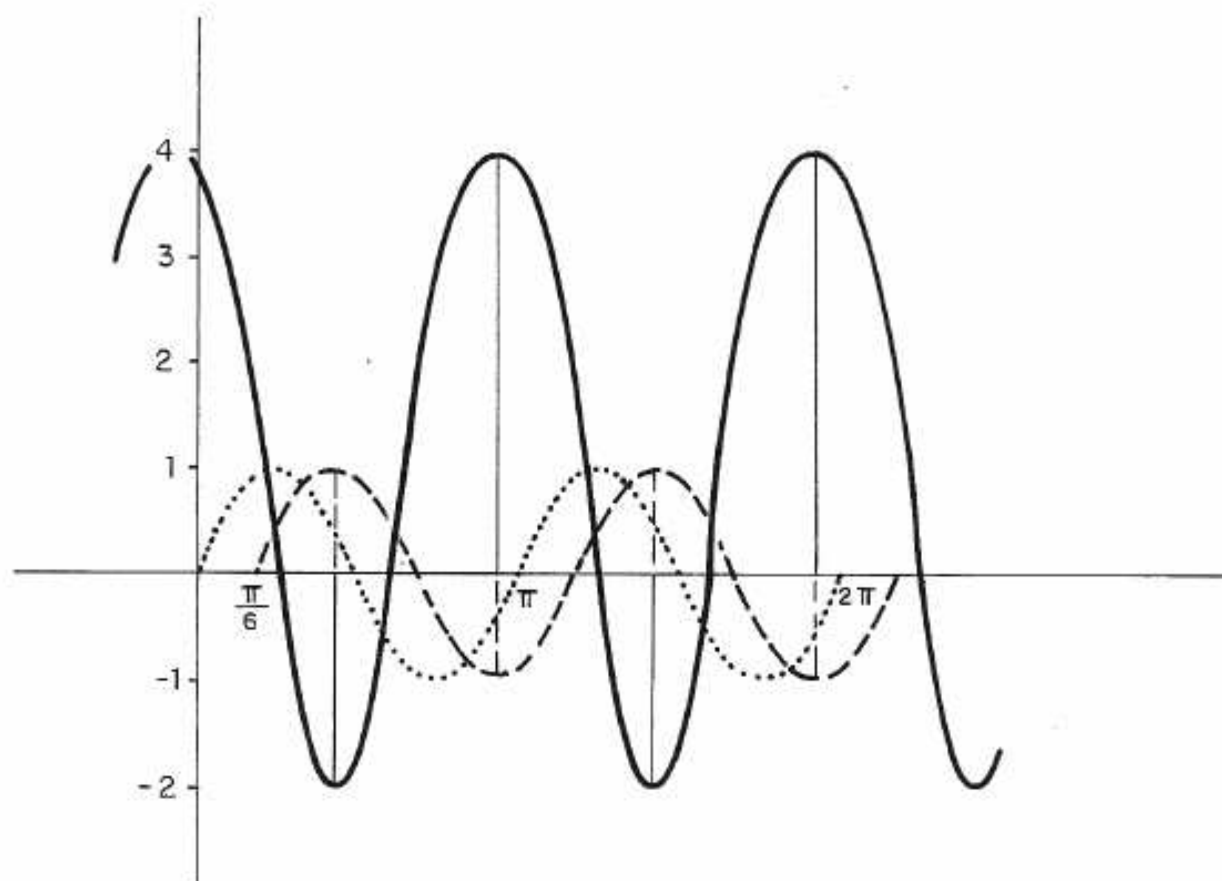


Figura 88

Exercícios

1. Faça os gráficos de

a) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

b) $y = -\operatorname{sen} 3x$

c) $y = |\text{sen}\, x|$

d) $y = \text{sen}\, |x|$

2. Determine o número de soluções das equações

a) $\text{sen}\, 3x = \cos x$, no intervalo $[0, 2\pi)$

b) $\text{sen}\, x = x$

c) $\text{sen}\, x = (x-5)^2$

d) $\text{sen}\, x = (x-2)^2$

e) $\cos x = x^2 + 1$

f) $\cos x = 2^x$

g) $\text{sen}\, x = \log x$

h) $\cos x = \frac{x}{2\pi}$

3. Faça os gráficos de

a) $y = \text{sen}^2\, x$

b) $y = \sqrt{|\text{sen}\, x|}$

c) $y = \text{sen}\, x^2$

d) $y = \text{sen}\, \frac{1}{x}$

e) $y = x\, \text{sen}\, \frac{1}{x}$

4. Para que valores de a, a equação $a \cdot \text{sen}\, x = \sec x$ tem solução?

9. Apêndice B

Por João Bosco Pitombeira de Carvalho

A história da trigonometria

A Trigonometria foi uma criação da Matemática grega. Ela surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, para calcular o tempo, e para ser utilizada na Navegação e na Geografia. Assim, os estudos de Trigonometria se concentravam na Trigonometria esférica, que estuda triângulos esféricos, isto é, triângulos sobre a superfície de uma esfera. No entanto, foi necessário para isso desenvolver partes da Trigonometria plana.

O estudo dos triângulos esféricos na Matemática grega vinha sendo feito desde os últimos pitagóricos. O próprio Euclides, que viveu em torno de 300 a.C., em um de seus trabalhos, o *Fenômenos*, estudou a Geometria esférica. Aproximadamente em 20 a.C., Teodósio compilou o que os gregos conheciam sobre o assunto em seu livro *Sobre a Esfera*.

Aristarco de Samos, que viveu em torno de 300 a.C., em seu livro *Sobre as Distâncias do Sol e da Lua*, baseando-se em observações, deduziu que

1) A distância da terra ao sol é maior do que 18 vezes e menor do que 20 vezes a distância da terra à lua. Na demonstração deste fato vemos pela primeira vez a aproximação do seno de um ângulo pequeno.
2) Os diâmetros do sol e da lua têm a mesma razão que suas distâncias da terra.
3) A razão do diâmetro do sol pelo diâmetro da terra é maior do que 19:3 e menor do que 43:6.

Os erros cometidos por Aristarco devem-se aos dados experimentais que utilizou. Seus raciocínio dedutivos estavam corretos.

Embora não tenhamos certeza de que ele utilizou Trigonometria, Apolônio de Perga, que viveu em torno de 200 a.C., um dos grandes matemáticos gregos, achou, em seu *Entrega Rápida*, a aproximação 3,1416

para π, mais tarde utilizada pelos hindus, os quais exprimiam este valor como o quociente $\frac{62832}{20000}$.

Podemos contudo dizer que o fundador da Trigonometria foi Hiparco de Nicéia, que viveu em torno de 120 a.C. Semelhantemente a muitos matemáticos gregos, inclusive o próprio Euclides, pouco sabemos sobre sua vida. A maior parte do que conhecemos sobre ele é devida a Ptolomeu (100(?), 180(?) d.C.) o qual cita vários resultados de Hiparco sobre Trigonometria e Astronomia, e a fragmentos de descrições de seus trabalhos contidos nas obras de outros autores gregos.

Hiparco foi o primeiro a determinar com precisão o nascer e o ocaso de várias estrelas, usando para isso uma tabela de cordas por ele calculada. Suas tabelas foram construídas para serem usadas em Astronomia. As principais contribuições de Hiparco em Astronomia foram a organização dos dados empíricos babilônios, a confecção de um catálogo de estrelas e a descoberta da precessão dos equinócios.

É provável que a divisão do círculo em 360° tenha se originado com a tabela de cordas de Hiparco. Ele provavelmente seguiu a idéia do matemático grego Hipsiclo, o qual por sua vez tinha dividido o dia em 360 partes, uma divisão possivelmente inspirada na astronomia babilônia.

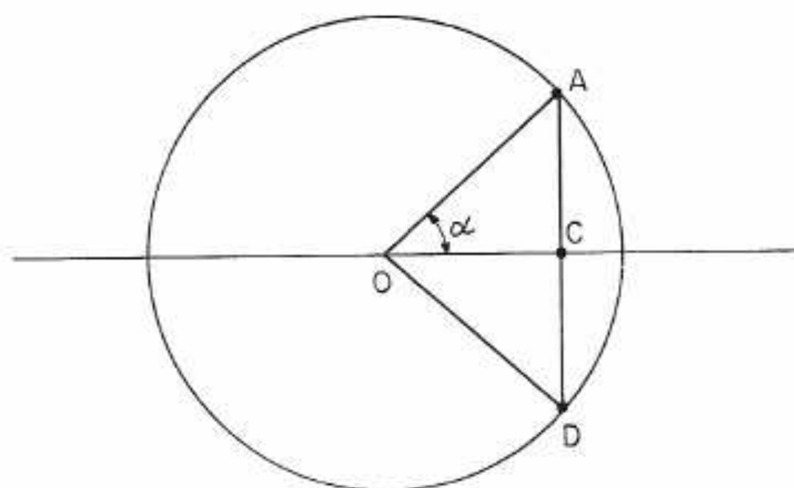


Figura 89

Os matemáticos gregos não usavam o seno de um ângulo, e sim trabalhavam com a corda do arco duplo. Se o ângulo $\widehat{AOB}$ subtende o arco $\widehat{AB}$, a corda do arco duplo $\widehat{AD}$ será AD (figura 89). Além disso, devido à influência babilônia, os gregos tomavam o raio OA com comprimento 60 e dividiam o círculo em 360 partes iguais. Se $\widehat{AOB} = \alpha$ vemos então

imediatamente que:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{1}{2}\frac{\text{corda}\,AD}{OA} = \frac{1}{120}\ \text{corda}\,AD.$$

Todos os matemáticos gregos que eram obrigados em seus trabalhos a efetuar cálculos com frações (Arquimedes, Ptolomeu, etc.) utilizavam as frações sexagesimais babilônias, devido à facilidade que elas introduziam em seus cálculos, daí a razão do raio de comprimento 60.

Um pouco depois de Hiparco, Menelao de Alexandria, que viveu em torno de 100 a.C., já apresenta uma Trigonometria bem desenvolvida, de que podemos ver partes em seu livro *Geometria Esférica*, o qual nos chegou em versão árabe. Nele, Menelao demonstra vários teoremas sobre triângulos esféricos. Provou, por exemplo, que se dois triângulos esféricos têm ângulos correspondentes iguais, então os triângulos são iguais (congruentes). Ele usou, sem demonstrar, o teorema de Geometria plana conhecido hoje como *Teorema de Menelao*: Se o triângulo ABC é cortado por uma secante que intersecta seus três lados como mostrado na figura, então

$$P_3A \cdot P_2B \cdot P_1C = P_3C \cdot P_2A \cdot P_1B.$$

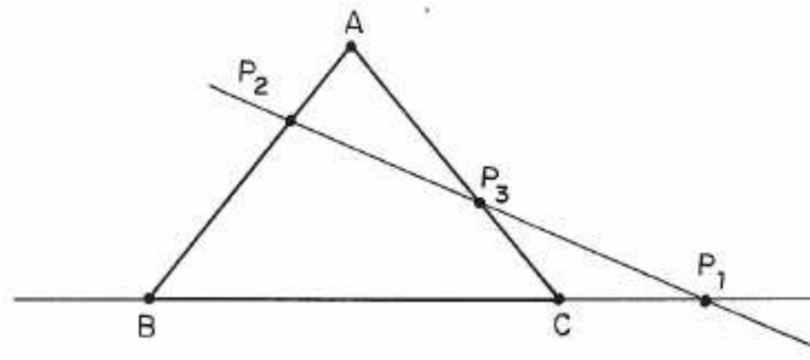


Figura 90

Menelao usou este teorema a fim de provar o resultado correspondente para triângulos esféricos.

A Trigonometria grega atingiu seu ápice com Cláudio Ptolomeu, o qual viveu em torno de 150 d.C. Seu principal trabalho, o *Almagesto*, permite datar a aproximadamente sua vida, pois nele Ptolomeu se refere a observações que fez de efemérides astronômicas cujas datas conhecemos.

O nome grego original desta obra era *A Coleção Matemática*, ou seja, *A Sintaxe Matemática*, que foi traduzido pelos árabes como Megale Sintaxis, Megisto e por fim Almagesto.

O *Almagesto* tem por objetivo descrever matematicamente o funcionamento do sistema solar, supondo que a terra está em seu centro (teoria geocêntrica, que será substituída, já no século XV, pela teoria heliocêntrica, introduzida por Copérnico (1473, 1543)). Ptolomeu desenvolveu a Trigonometria nos capítulos 10 e 11 da primeiro livro do Almagesto, sendo que o capítulo 11 consiste em uma tabela de cordas (ou seja, de senos). Para a construção desta tabela, a partir do fato de que em um quadrilátero inscritível $ABCD$ vale a relação

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD,$$

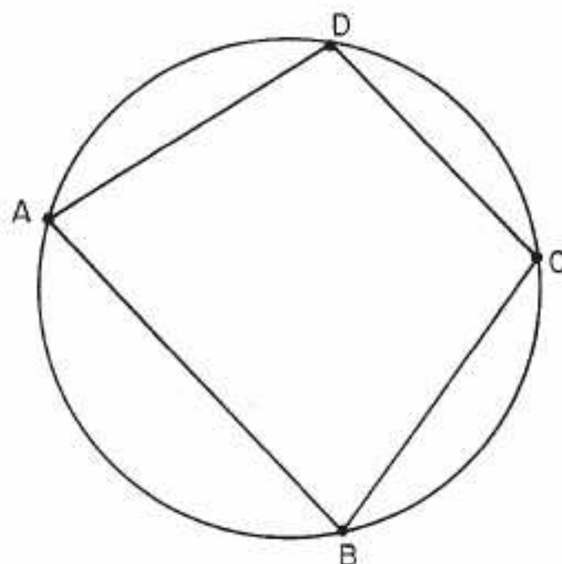


Figura 91

Ptolomeu deduz o que em notação moderna e usando as funções seno e cosseno é a expressão para $\operatorname{sen}(a \pm b)$. Além disso, demonstrou que $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$, onde A é um ângulo agudo.

Com as técnicas expostas em seu livro, Ptolomeu é capaz de resolver qualquer triângulo, decompondo-o convenientemente em triângulos retângulos. A exposição da trigonometria dada por Ptolomeu no *Almagesto* foi padrão, até o renascimento.

Como já dissemos, a Trigonometria era usada pelos gregos em Astronomia. Eles nunca se preocuparam em utilizá-la em Topografia, campo em que hoje ela tem emprego constante. A Topografia grega (como a romana) sempre recorreu somente à Geometria euclidiana.

Com os hindus, a Trigonometria continuou sendo aplicada à Astronomia. No século V depois de Cristo, os astrônomos hindus abandonaram as

tabelas de cordas e adotaram as de senos; o matemático hindu Aryabhata (476, ?) passou a trabalhar com a corda AB do arco AB, em um círculo de raio 3438 (este número é obtido supondo que o comprimento da circunferência é $360 \cdot 60$ e usando o valor $3,14$ para π. Com a mudança de raio, as tabelas de Ptolomeu não mais puderam ser utilizadas, sendo portanto necessário refazê-las. A Trigonometria hindu era essencialmente aritmética, ao contrário da grega, muito mais geométrica.

Os árabes herdaram a Trigonometria dos gregos e hindus, adotando o ponto de vista aritmético destes últimos. Introduziram, para facilitar os cálculos, a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante. Eles foram também indiretamente responsáveis pelo uso da palavra seno, cuja origem latina significa *bolsa, baía.* A palavra meio-corda, em sânscrito, língua utilizada pelos antigos hindus, é *jiva.* Esta palavra foi utilizada sem modificações pelos árabes. No entanto, como em algumas outras línguas, em árabe freqüentemente se escrevem somente as consoantes das palavras, deixando as vogais ao cuidado da interpretação do leitor. Ora, a palavra sânscrita *jiva* tem as mesmas consoantes que a palavra árabe bem familiar *jaib* (v e b se confundem como labiais explosivas). *Jaib*, em árabe, significa bacia ou bolso. Assim, foi natural que os tradutores de trabalhos matemáticos, do árabe para o latim, e que desconheciam o sânscrito, supusessem que lidavam com tabelas de *jaib*, e traduziram este termo pela palavra latina correspondente, *sinus*, que deu origem a seno.

Os árabes conheciam a lei dos senos para triângulos, já demonstrada em um trabalho do matemático al-Biruni (?, 1048). Mais tarde, Nasir-Eddin sistematizou os conhecimentos de Trigonometria então existentes em seu *Tratado sobre o Quadrilátero.*

Como já dissemos, o interesse pela Trigonometria entre gregos, hindus e árabes era motivado por suas aplicações à Astronomia. A partir do Renascimento, época da expansão marítima européia, que exigiu o desenvolvimento da Cartografia, a Trigonometria passou a ser utilizada em Cartografia e em Topografia, como já proposto por Fibonnaci (1180?, 1250) em seu *Prática da Geometria*, de 1220.

Outro fator de desenvolvimento da Trigonometria foi a necessidade de refazer todos os cálculos da Astronomia posicional, com a adoção progressiva do sistema heliocêntrico de Copérnico (1473-1543). Aliás, seu livro, *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (1543) contém partes substanciais dedicadas à Trigonometria, as quais já tinham sido publicadas indepen-

dentemente em seu *De Laeteribus et Angulis Triangulorum.* Em ambos os trabalhos, Copérnico demonstra grande domínio da Trigonometria.

O desenvolvimento da Navegação exigia mapas mais precisos e cálculos mais exatos e numerosos das efemérides astronômicas, para permitir a determinação da hora e da localização durante as navegações. As preocupações crescentes com a precisão das observações astronômicas podem ser vistas nos trabalhos de Tycho Brahe (1546-1601) que construiu instrumentos de observação cada vez maiores e mais precisos, e passou anos a levantar dados sobre estrelas e planetas, mais tarde utilizados por Kepler (1571-1630) para a formulação de suas leis dos movimentos planetários, que impuseram definitivamente o modelo heliocêntrico proposto por Copérnico.

Grande parte deste desenvolvimento da Trigonometria no Renascimento é devido aos alemães. Devemos citar, em primeiro lugar, George Peurbach (1423-1461), de Viena, que traduziu o *Almagesto* diretamente do grego, livrando-o dos erros introduzidos por tradutores e copistas sucessivos e começou a calcular tabelas de senos mais precisas, exigidas pelas aplicações. Seu trabalho foi continuado por seu aluno João Regiomontano (1436, 1476), o qual conhecia os trabalhos sobre Trigonometria de Nasir Eddin e a partir deles, organizou a Trigonometria como uma parte da matemática independente da Astronomia. Em seu *De Triangulis* (1464), estuda cuidadosamente a resolução de triângulos, usando a Trigonometria do triângulo retângulo. Neste livro, encontra-se também uma demonstração da *Lei dos senos.* A fim de evitar o uso de frações e de decimais, Regiomontano calculou duas tabelas de senos: uma usando um raio de 600.000 unidades e a outra um de 1.000.000 de unidades. Além disso, calculou tabelas de tangentes.

A construção de tabelas trigonométricas era uma tarefa lenta e desagradável, mas essencial para o progresso da Astronomia e da Matemática. A utilização crescente da Trigonometria fez com que muitos outros matemáticos construíssem tabelas, como por exemplo George Joaquim Rético (1514-1576), Copérnico, François Vieta (1540-1603) e Bartolomeu Pitisco (1561-1613). A este último devemos a palavra *Trigonometria*, que quer dizer medida dos ângulos de um triângulo.

Rético fundiu as idéias de Copérnico e de Regiomontano com suas próprias contribuições. É de sua autoria o mais completo tratado de Trigonometria até então publicado. Encontra-se nele uma exposição da Trigo-

nometria do triângulo retângulo: em vez de dizer que CB é o seno do arco CD, ele considerou CB como o seno do ângulo COB, o que introduziu essencialmente a formulação da Trigonometria do triângulo retângulo, como feito até hoje. Rético apresenta também tabelas das seis funções trigonométricas usuais.

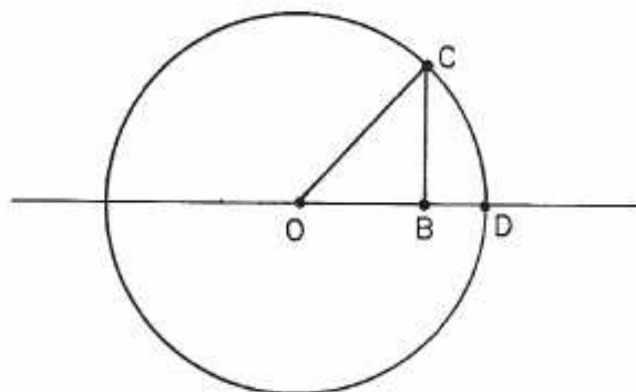


Figura 92

O matemático francês François Vieta sistematizou o estudo da trigonometria esférica, até então um amontoado de fórmulas desconexas, e mostrou que

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Além disso, deduziu fórmulas para $\operatorname{sen}(n\theta)$ e $\cos(n\theta)$.

Podemos relatar um episódio pitoresco relacionado com o conhecimento que Vieta tinha da expressão para $\operatorname{sen} n\theta$. Em 1593, o matemático belga Adriano Romano (1561-1615), desafiou os matemáticos a resolverem a equação

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \cdots - 3795x^3 + 45x = k.$$

O embaixador dos Países Baixos na França afirmou que não existiam matemáticos franceses capazes de resolver este problema. O rei da França, Henrique IV, convocou Vieta, o qual percebeu rapidamente que esta equação exprime $\operatorname{sen} 45\theta$ em termos de $\operatorname{sen}\theta$, com $k = \operatorname{sen} 45\theta$ e $x = 2\operatorname{sen}\theta$. Vieta já sabia que a equação podia ser decomposta em uma de grau 5 e duas de grau 3, após o que ele as resolveu, para espanto de todos.

Na Europa, nesta época, estavam sendo descobertas ou utilizadas várias identidades trigonométricas, como por exemplo $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$, fórmula introduzida pelo matemático árabe

Ibn- Yunes (?, 1008). A ênfase da Trigonometria começou a passar da solução de triângulos para a investigação de relações funcionais.

A fórmula citada acima é um exemplo das usadas na "prostaférese", ou seja, substituição de produtos por somas: Para multiplicar dois números com muitos algarismos decimais escreva-os, após dividí-los por potências convenientes de 10, como cossenos. Nesta época já existiam boas tabelas trigonométricas, com até 15 casas decimais, e era possível calcular os arcos A e B, achar então $\cos(A+B), \cos(A-B)$ e somá-los. Uma multiplicação por uma potência apropriada de 10 fornece agora o resultado da multiplicação. A prostaférese antecedeu os logaritmos como técnica para simplificar cálculos, e foi adotada por Tycho Brahe em seus cálculos astronômicos. É muito provável que a prostaférese tenha sido o ponto de partida de Napier em sua procura de um método (ou logaritmos) para efetuar, de maneira mais rápida, os cálculos longos e cansativos necessários na época.

A partir de Galileu (1564, 1642), e com a descoberta da Geometria Analítica por Descartes (1596, 1650) e por Fermat (1601, 1665), o estudo das curvas desenvolveu-se muito. A *curva* seno foi introduzida nos estudos de Roberval (1602, 1675) sobre a ciclóide; no livro *Mecânica* de Wallis (1616, 1703), publicado em 1670, vemos um gráfico de dois períodos da função seno. É o primeiro aparecimento de uma *função* trigonométrica. Usando o *método dos indivisíveis*, Roberval mostrou que $\int_a^b \operatorname{sen} x dx = \cos b - \cos a$. Pouco a pouco, as funções trigonométricas passaram a figurar freqüentemente em Matemática, paralelamente ao uso de tabelas cada vez mais precisas para aplicações em Topografia, Navegação e Astronomia de posição. Já nos séculos XVIII e XIX, foi visto serem elas essenciais para a solução de certos problemas de Matemática e de Física. A introdução das *séries de Fourier* mostrou a posição central destas funções na Análise Matemática moderna e em muitas de suas aplicações.

9. Apêndice C

Por João Bosco Pitombeira de Carvalho

"O Espírito Divino expressou-se sublimemente nesta maravilha da análise, neste portento do mundo das idéias, este anfíbio entre o ser e o não ser, que chamamos de raiz imaginária da unidade negativa". (Leibniz)

A história dos números complexos

A história dos números complexos ilustra bem como um conceito matemático fundamental pode demorar muito até ser bem compreendido e aceito. É uma história longa de resistência, por parte de excelentes matemáticos, a admitirem a existência dos números complexos, mesmo quando os usavam.

Os números complexos começaram a aparecer sistematicamente em Matemática com os algebristas italianos do século XVI. Quando isso aconteceu, os matemáticos não tinham nem ainda esclarecido os conceitos de números negativos e irracionais. Assim, o desenvolvimento do conceito de número não foi algo progressivo, dando-se na ordem que nos parece natural, e que é exposta nos textos: números naturais, inteiros, racionais, reais e por fim complexos. Até o século XIX, quando Gauss com sua autoridade divulgou a interpretação geométrica dos números complexos, a qual lhes deu "direito de cidadania", ainda havia matemáticos que discutiam se os números negativos realmente existiam ou não!

Cardano (1501, 1576), em seu livro *Ars Magna* (1545), o qual entre outras coisas dá o método para resolver a equação do terceiro grau, resolve o problema de dividir 10 em duas partes cujo produto é 40. Este problema reduz-se a resolver a equação de segundo grau $x^2 - 10x + 40 = 0$. Resolvendo-a pelo método usual de completar o quadrado, obtemos $(x - 5)^2 - 25 + 40 = 0$, donde $(x - 5)^2 = -15$, e daí obtemos, operando como se os números que aparecem fossem números reais, $(x - 5) = \pm\sqrt{-15}$, ou seja $x = 5 \pm \sqrt{-15}$, que é a solução procurada. Como diz Cardano, "Deixando de lado toda a tortura mental envolvida, multiplique $(5 + \sqrt{-15}$ por $(5 - \sqrt{-15})$. O produto é

$25 - (-15) = 40(\dots)$. Assim progride a sutileza aritmetica cujo objetivo, como afirmado, é tão refinado quanto inútil".

De qualquer maneira, o encontro dos matemáticos com os números complexos era inevitável no estudo da equação do terceiro grau. No chamado "caso irredutível", quando a equação possui 3 raízes reais, o emprego do método de Cardano acarreta obrigatoriamente o manejo de números complexos, embora as soluções da equação, que constituem o resultado final, sejam reais!

Bombelli (1526-1572), discípulo de Cardano, compreendeu melhor a álgebra dos números complexos. Ao retomar o estudo da equação do terceiro grau, ele introduziu sua quantidade "piu di meno", que corresponde a $\sqrt{-1}$, e enunciou, sob forma de versos, as regras de operação com ela. Embora afirmasse que os números complexos eram inúteis e "sofísticos", Bombelli operou livremente com eles. Em sua álgebra, deduziu que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$.

Vemos assim que no século XVI os matemáticos começaram a usar os números complexos, aplicando-lhes as regras usuais do cálculo com números reais, embora escandalizados e dando declarações veementes de que eles "não existiam", eram "inúteis", etc. A crença de que se poderia aplicar aos números complexos as mesmas regras do cálculo com números reais levou por vezes a enganos. Euler (1707, 1783), já no século XVIII, afirmou por exemplo que $\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{4} = 2$, por analogia com a regra $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, válida para os números reais. O princípio de aplicar a novos objetos algébricos as regras usuais do cálculo de números já conhecidos foi denominado, no século passado, o "princípio da permanência das formas" e foi utilizado freqüentemente em álgebra, às vezes com resultados bons, às vezes maus.

O Teorema Fundamental da Álgebra diz que toda equação da forma $a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ números complexos tem exatamente k raízes complexas, se contarmos suas multiplicidades. A primeira formulação escrita deste teorema foi dada por Peter Roth (?, 1617), matemático de Nutemberg; em sua *Arithmetica Philosophica*, de 1600, ele afirma que uma equação tem no máximo tantas raízes quanto seu grau. Além de Rothe, um dos primeiros matemáticos a se ocuparem com este teorema foi Albert Girard (1595-1632), em cujo livro *L'Invention Nouvelle en Algèbre*, de 1629, lemos que uma equação algébrica completa de grau n (isto é, em que não há coeficientes nulos), possui n raízes.

Uma mudança na atitude dos matemáticos em relação aos números complexos pode ser percebida nas palavras de Girard: "Pode-se perguntar: para que servem estas soluções impossíveis (raízes complexas). Eu respondo: para três coisas – para a validez das regras gerais, devido à sua utilidade e por não haver outras soluções".

Um pouco mais tarde, René Descartes (1596, 1650) em seu *La Géométrie* aceita que uma equação tem tantas raízes quanto seu grau, se admitirmos as raízes imaginárias. Descartes introduziu em seu livro a denominação números imaginários: "nem as raízes verdadeiras nem as falsas [negativas] são sempre reais; por vezes elas são imaginárias". Para ele, enquanto que as raízes negativas podem ser tornadas "reais" transformando a equação em outra cujas raízes são positivas, isso não pode ser feito com raízes complexas. Assim, essas raízes não são números.

Em 1749, D'Alembert (Jean Le Rond D'Alembert, 1717-1783) apresenta a primeira tentativa de demonstração convincente deste teorema, que até hoje é conhecido como Teorema de D'Alembert. Em verdade, a demonstração de D'Alembert não mostra nem que existem raízes da equação. Ele demonstra qual a forma das raízes, se elas existirem. O mérito do trabalho de D'Alembert foi o de divulgar os números complexos, pois nele encontra-se uma exposição da teoria dos números complexos e das funções complexas.

Uma contribuição importante de D'Alembert, foi esclarecer que tipos de números complexos podem ser obtidos ao se resolver equações algébricas. Como conseqüência da percepção ainda imprecisa dos números complexos, os matemáticos do século XVIII acreditavam que, resolvendo equações algébricas diferentes, e em particular extraindo raízes de números complexos, se obteriam diferentes "tipos" dessas "quantidades". D'Alembert mostrou, em 1747, que qualquer expressão algébrica de um número complexo $a + b\sqrt{-1}$ é também um número da forma $a + b\sqrt{-1}$. Expressão algébrica, para D'Alembert, incluía elevar um número complexo a uma potência complexa. Sua demonstração só não é correta para o caso $(a + b\sqrt{-1})^{c+d\sqrt{-1}}$.

Com Euler, em 1749, as investigações sobre o Teorema Fundamental da Álgebra atingiram outro nível. Em seu *Pesquisa sobre as Raízes Imaginárias de uma Equação* ele mostrou, em primeiro lugar, que se $a+\sqrt{-1}$ é raiz de uma equação, então o mesmo acontece com $a-\sqrt{-1}$. Ou seja, se uma equação tem uma raiz complexa, possui um fator da forma x^2+kx+r.

Ele mostrou em seguida que toda equação de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real, e que uma equação de grau par ou não possui raízes reais ou possui pares de tais raízes. Demonstrou em seguida que todas as raízes não-reais são da forma $a + b\sqrt{-1}$. Para isso, foi necessário estudar cuidadosamente as operações com números complexos, incluindo potências imaginárias, logaritmos de números complexos, funções trigonométricas de argumento complexo, etc.

A ambivalência dos matemáticos do século XVIII em relação aos números complexos pode ser mais uma vez evidenciada em Euler. Apesar de seus trabalhos em que ensinava a operar com eles, afirma

"Como todos os números concebíveis são ou maiores ou menores do que zero ou iguais a zero, fica então claro que as raízes quadradas de números negativos não podem ser incluídas entre os números possíveis [números reais]. E esta circunstância nos conduz ao conceito de tais números, os quais, por sua própria natureza, são impossíveis, e que são geralmente chamados de números imaginários, pois existem somente na imaginação."

Para ele, os números complexos são úteis em problemas cuja resposta não conhecemos. Assim, se desejarmos dividir 10 em duas partes cujo produto é 40, obtendo $5 + \sqrt{-15}$ e $5 + \sqrt{-15}$, vemos que o problema não tem solução.

Os Bernoullis e Leibniz usaram os números complexos livremente, em ingegração, sem se preocuparem com sua conceituação ou existência. Essa utilização levou à discussão sobre a existência de logaritmos de números complexos. De fato, é bem conhecido que a substituição

$$z = \frac{b(t-1)}{t+1}$$

transforma

$$\frac{adz}{b^2 - z^2} \quad \text{em} \quad \frac{adt}{2bt},$$

que é a diferencial de $(a/2b)\ln t$. Analogamente, raciocinava Johann Bernoulli, a transformação

$$z = \sqrt{-1}\frac{b(t-1)}{t+1}$$

transformará

$$\frac{dz}{b^2 + z^2} \quad \text{em} \quad \frac{-dt}{2bt\sqrt{-1}},$$

que será portanto a diferencial do logaritmo de um número complexo. As discussões sobre a existência dos logaritmos dos números negativos e complexos foram vivas e freqüentes, até que Euler apresentou uma justificativa convincente para sua existência. Ele percebeu que se z é um número complexo qualquer, $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, então $lnz = lnr + i(2k\pi + \theta)$, com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; ou seja, há infinitas determinações para o logaritmo de um número complexo. Com Euler, pode-se dizer que a álgebra dos números complexos atingiu sua forma atual.

No fim do século XVIII os matemáticos já se aventuravam a efetuar operações bem ousadas com números complexos. No entanto, uma indicação da posição ambígua mantida por eles em relação aos números complexos fica evidente pelo fato de que a grande Enciclopédia, organizada por D'Alembert e outros "filósofos" franceses, em seus artigos sobre Matemática, redigidos pelo próprio D'Alembert, mantém um silêncio prudente sobre estes números.

Laplace (Pierre Simon de Laplace, 1749-1827), em 1795 atacou o problema de demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra, sem contudo conseguir uma prova aceitável. A primeira demonstração correta deve-se a Gauss (1777-1855), na qual utiliza propriedades topológicas da reta e do plano, que não tinham sido ainda explicitadas em sua época. A demonstração de Gauss encontra-se em sua tese de doutoramento, de 1799. Neste trabalho, Gauss, além de apresentar sua demonstração, estuda criticamente as demonstrações precedentes de D'Alembert (1746), Euler (1749), de Foncenet (1759) e Lagrange (1772), todas elas insatisfatórias. Ao longo dos anos, Gauss apresentou três novas demonstrações do Teorema Fundamental.

É provável que a idéia de representar geometricamente os complexos tenha ocorrido a Gauss ao demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra, mesmo que ele não tenha utilizado isso na demonstração. Já Wallis (1616, 1703) tinha procurado uma tal representação, tentando representar os números complexos no plano, mas seus esforços não foram bem sucedidos.

A idéia de Wallis foi retomada independentemente por vários matemáticos, até Gauss. Um deles foi o norueguês Caspar Wessel (1745-

1818), cujos trabalhos ficaram desconhecidos até 1897. Outros matemáticos que trabalharam sobre o problema foram os franceses Lazare Carnot (1753-1823), em seu livro *Géométrie de Position*, de 1803, e Adrian Quentin Buée (1748-1826). O italiano Jean Robert Argand (1768-1822) escreveu o livro *Ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas* em 1806. No entanto, com exceção de Carnot, os outros eram muito pouco conhecidos, e foi necessário o prestígio de Gauss para tornar conhecida e aceita a representação geométrica dos números complexos. Ele publicou suas idéias sobre o assunto em 1831, referindo-se " à verdadeira metafísica das quantidades imaginárias".

11. Respostas dos Exercícios

Capítulo 2

2.1) a) $52° \, 14' \, 23''$; b) $41° \, 49' \, 20''$; c) $28° \, 22' \, 40''$; d) $8° \, 54' \, 24''$.

2.2) $54°$

2.4) 0,8 e 0,75.

2.6) $1/\sqrt{26}$ e $5/\sqrt{26}$.

2.7) $100\sqrt{3}/3 \, m$.

2.8) $79{,}5 \, m$.

2.11) $d/2$.

2.12) $(d \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)/(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$.

2.13) a) $3/5$; b) $(\sqrt{5} - 1)/2$.

2.14) $15°$.

2.15) $a \cdot \cos^n \alpha$.

2.17) $\sqrt{2}$.

2.18) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

2.19) b) $\operatorname{sen} 15° = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$, $\cos 15° = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$, $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$.

2.21) 0,5.

2.22) 0,8.

2.23) $144 \, m$.

2.25) $24/25$.

2.26) $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}/4$ e $(\sqrt{5} + 1)/4$.

2.27) $2\pi R^2(1 - \operatorname{sen} \theta)$.

2.29) $(\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1)/8$ e $(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{15} + \sqrt{3})/8$.

2.30) $1/20 < \operatorname{sen} 3° < 1/18$.

Capítulo 3

3.1) a) 3º; b) 2º; c) 1º.

3.2) a) 3ºou 4º; b) 2ºou 3º; c) 1ºou 3º.

3.3) a) $(\sqrt{2}-\sqrt{6})/4$; b) $-\sqrt{3}/2$; c) -1.

3.4) a) $\pi/6$ e $5\pi/6$; b) $3\pi/4$ e $5\pi/4$; c) $3\pi/4$ e $7\pi/4$; d) nenhum valor.

3.5) a) -1; b) $\sqrt{3}/2$; c) $(\sqrt{5}-1)/4$; d) 1; e) $-\sqrt{3}/2$; f) $-\sqrt{6}$.

3.7) $\{2k\pi \pm 3\pi/4 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3.10) $\pi/4$, $7\pi/12$ e $11\pi/12$.

3.11) $\{k\pi/2 + \pi/6 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3.12) 4.

3.13) $2k\pi + 4\pi/5$.

3.14) $\{k\pi/2 + \pi/6 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3.15) a) V; b) V; c) F; d) F; e) F; f) V; g) V.

3.16) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

3.21) a) $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$; b) $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$; c) $\mathbb{R}$.

3.23) $\operatorname{sen} x = 2\sqrt{2}/3$, $\cos x = -1/3$, $\operatorname{cosec} x = -3\sqrt{2}/4$, $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{2}/4$, $\sec x = -3$.

3.24) $x = k\pi$, $x = k\pi - \pi/3$.

3.26) 5.

3.28) $5/13$ e $12/13$.

3.29) -1 ou -2.

3.30) $(3m - m^3)/2$.

3.33) $ab = 1$.

3.34) $(1-\sqrt{3})/2$.

3.35) $a^2 + b^2 = 2$.

3.38) a racional.

3.39) Há uma única solução para $\overline{AC} = a \cdot \operatorname{sen} \alpha$ e para $\overline{AC} \geq a$.
Há duas soluções para $a \cdot \operatorname{sen} \alpha < \overline{AC} < a$.
Não há solução para $\overline{AC} < a \cdot \operatorname{sen} \alpha$.

Capítulo 4

4.1) $-16/65$.

4.3) $24/25$.

4.4) $\pm 4\sqrt{2}/9$ e $7/9$.

4.5) $4/3$ e $11/2$.

4.7) a) $1/4$; b) $\sqrt{2}$; c) $\sqrt{3}$.

4.8) $\operatorname{sen}(x/2) = \pm\sqrt{(1-\cos x)/2}$, $\cos(x/2) = \pm\sqrt{(1+\cos x)/2}$.

4.9) Há 4 soluções para $(\operatorname{sen}(x/2), \cos(x/2), \operatorname{tg}(x/2))$;
$(\sqrt{2}/10, -7\sqrt{2}/10, -1/7)$, $(-\sqrt{2}/10, 7\sqrt{2}/10, -1/7)$,
$(7\sqrt{2}/10, \sqrt{2}/10, 7)$, $(-7\sqrt{2}/10, -\sqrt{2}/10, 7)$.

4.10) 0 ou $-4/3$.

4.11) a) $1/4$; b) $1/8$.

4.13) $120°$.

4.14) $\sqrt{13}$ e $\sqrt{37}$.

4.15) $b = 3\sqrt{2}$, $c = 3(\sqrt{6}+\sqrt{2})/2$.

4.17) $1/3$.

4.18) $-1/3$.

4.19) $R \cdot (1 - \operatorname{sen} x)/(1 + \operatorname{sen} x)$.

4.22) 0 ou $2a/(a^2+1)$.

4.23) $a^2 + b^2 = 2(1+c)$.

4.24) $4/5$, $-3/5$, $-4/5$.

4.25) 4.

4.26) $3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$.

4.29) $P(x) = 8x^3 - 6x + 1$. As outras raízes são $\operatorname{sen} 50°$ e $-\operatorname{sen} 70°$.

4.35) a) retângulo ($\hat{A} = 90°$); b) isósceles ($\hat{B} = \hat{C}$); c) não existe tal triângulo; d) isósceles ($\hat{B} = \hat{C}$); e) isósceles ($\hat{B} = \hat{C}$); f) isósceles ($\hat{A} = \hat{B}$); g) retângulo ($\hat{A} = 90°$); ou ($\hat{B} = 90°$); ou ($\hat{C} = 90°$).

4.37) a) $\sqrt{2}$, b) $2\cos\pi/18$.

4.41) Aproximadamente: $6676\,m$ ou $2696\,m$.

4.42) Aproximadamente: $203{,}6\,m$.

4.43) $\overline{PA} \simeq 6{,}36$, $\overline{PB} \simeq 9{,}33$, $\overline{PC} \simeq 5{,}38$.

4.44) $(d \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)/(\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cos \gamma})$.

Capítulo 5

5.1) a) $x = k\pi/2$; b) $x = \pi/2 + 2k\pi$, ou $x = \pi/6 + 2k\pi/3$; c) $x = k\pi/4$, k inteiro não congruo a 2 módulo 4; d) $x = \pi/8 + k\pi/4$; e) $x = \pi/2 + 2k\pi$ ou $x = -5\pi/6 + 2k\pi$; f) $x = \pi/4 + 2k\pi$; g) $x = \pi/4 + k\pi/2$; h) $x = \pi + 2k\pi$ ou $x = -\pi/2 + 2k\pi$; i) $x = k\pi$ ou $x = \pi/6 + k\pi$; j) $x = \pi/2 + k\pi$ ou $x = \pi/18 + 2k\pi/3$ ou $x = 5\pi/18 + 2k\pi/3$; k) $x = \pi/4 + k\pi$ ou $x = \operatorname{arctg} 1/2 + k\pi$; l) $x = k\pi/3$; m) $x = \pi/6 + k\pi/3$ ou $x = \pi/4 + k\pi/2$ ou $x = \pi/2 + k\pi$.

5.2) $-\sqrt{A^2 + B^2} \leq C \leq \sqrt{A^2 + B^2}$.

5.3) $m \leq 1/25$ ou $m \geq 7/6$.

5.4) a) $2x\sqrt{1 - x^2}$; b) $x/\sqrt{1 - x^2}$; c) $-\sqrt{2}/2$; d) $\pi/4$; e) 0.

5.6) a) $x = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}/2\sqrt{13}$; b) $x = \pm 1$; c) $x = 0$ ou $x = \pm 1/2$.

5.7) a) $x = \pi/4 + k\pi/2$ ou $x = 2\pi/3 + 2k\pi$ ou $x = 4\pi/3 + 2k\pi$. b) $x = k\pi/5$.

5.9) $2 - \sqrt{3}$.

5.10) a) $1/2$; b) $1/4$.

5.11) 30°, 30°, 120°.

5.12) a) $-5\pi/6 + 2k\pi \leq x \leq -\pi/6 + 2k\pi$; b) $2\pi/3 + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$.

5.14) $x = 2\cos(\pi t - 3\pi/6)$; amplitude = $2\,m$, ângulo de fase = $2\,s$, frequência = $1/2$ ciclo por segundo.

Capítulo 6

6.2) a) $7 - 6i$; b) $43 + 15i$; c) $7/41 - 19/41\,i$; d) $(-1/2)i$; e) $-3 + 9i$; f) $13i$; g) $17i$.

6.3) a) 1; b) 1; c) i; d) -64; e) -1; f) 1.

6.4) a) $-23 + 18i$; b) $122 + 597i$; c) $29 + 278i$;

6.5) 0, 2 ou -2.

6.6) ± 1;

6.7) 2;

6.8) $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{7}/2$, 1, $\sqrt{13}$.

6.10) a) $\pm 3i$; b) $-1 \pm \sqrt{5}i$; c) $(-3 \pm 3\sqrt{3}\,i)/2$; d) $(3 \pm \sqrt{7}i)/2$.

6.11) a) $\pm 2i$; b) $\pm(2 - i)$; c) $\pm(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2\,i)$.

6.13) 1.

6.14) 1.

6.17) $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_{3,4} = -1/2 \pm \sqrt{3}/2\,i$.

6.18) $-1 - i$.

6.19) a) $z = 1 + i$, $\omega = i$; b) $z = i$, $\omega = 1 - i$.

6.21) $2 - 3i$.

6.22) $1 \pm i$, $2 \pm \sqrt{3}$.

6.24) a) a reta $x = 2$;
b) a reta $y = x$;
c) a região entre as retas $y = 1$ e $y = 4$,inclusive;
d) o círculo de centro $(0, 0)$ e raio 1;
e) o círculo de centro $(-1, 0)$ e raio 1;
f) o círculo de centro z_0 e raio a;
g) a união do círculo de centro $(0, 0)$ e raio 1 com o eixo das abscissas, excluida a origem;
h) a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$;
i) o segmento (fechado) de extremidades i e $-i$;
j) vazio;
k) o círculo de centro $(1/2, -1/2)$ e raio $\sqrt{2}/2$, excluido o ponto $(1, 0)$;
l) o círculo de centro $(1/3, 0)$ e raio $2/3$;
m) o semi-plano $x \leq 0$.

6.25) $1/2 \pm \sqrt{3}/2\,i$;

6.26) 4 e 2.

6.27) $\sqrt{5} \pm 1$;

6.29) a) Os vetores que representam z_1 e z_2 devem ter a mesma direção e o mesmo sentido;
b) Os vetores que representam z_1 e z_2 devem ter a mesma direção e sentidos opostos.

6.30) $1 \leq |z + \omega| \leq 7$.

6.31) Os vetores que representam z e ω devem ser ortogonais.

Capítulo 7

7.1) a) $2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$;
b) $\sqrt{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$;
c) $8(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°)$;
d) $2(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$;
e) $2(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$.

7.3) $\theta_1 - \theta_2 = \pi + 2k\pi$.

7.4) a) $\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)$; b) $\cos(\theta + \pi) + i \operatorname{sen}(\theta + \pi)$; c) $\cos(\theta + 3\pi/2) + i \operatorname{sen}(\theta + 3\pi/2)$; d) $2\cos\theta/2(\cos\theta/2 + i \operatorname{sen}(\theta/2)$.

7.5) n múltiplo de 4.

7.7) a) $-16/65$; b) $56/65$; c) $63/65$; d) $-33/65$; e) $-63/16$; f) $-33/56$.

7.10) $\pi/9$.

7.11) $x = k\pi$ ou $x = \pi/8 + k\pi/2$.

7.17) 0, ± 1, $\pm i$.

7.18) a) 1; b) 0.

7.19) a) $z = \pm\sqrt{3}/2 + 1/2\, i$ ou $z = -i$; b) $z = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$; c) $z = 0$, ou $z = -1$ ou $z = \pm 1/2 \pm \sqrt{3}/2\, i$; d) $z = 1$ ou $z = -1/2 \pm \sqrt{3}/2\, i$ ou $z = -2$ ou $z = 1 \pm \sqrt{3}i$; e) $z = -i \operatorname{ctg} k\pi/n$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

7.20) $z = (-1 + \sqrt{3})/2 + (-1 + \sqrt{3})/2i$ ou $z = (-1 - \sqrt{3})/2 + (-1 - \sqrt{3})/2i$.

7.21) $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$.

7.23) $C_1 = (0, 7)$, $D_1 1 = (-2, 4)$ ou $C_2 = (6, 3)$, $D_2 = (4, 0)$.

7.24) $(4 + 2\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1)$ ou $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2} - 1)$.

7.25) a) z real e diferente de -1. b) $|z| = 1$, $z \neq -1$.

7.26) Se pedra = $(0, 0)$ e caverna = $(d, 0)$ o tesouro está em $(d/2, -d/2)$.

7.27) a) $f(A) = \{x + yi \mid y = -x\}$, $f(B) = \{x + yi \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \leq 0\}$;
b) $f(A) = \{x + yi \mid y = x - 1\}$, $f(B) = \{x + yi \mid (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ e } y \geq 1\}$;
c) $f(A) = \{x + yi \mid y = x\}$, $f(B) = \{x + yi \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ e } y \geq 0\}$;
d) $f(A) = \{x + yi \mid y = -x\}$, $f(B) = \{x + yi \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } x \leq 0\}$;
e) $f(A) = \{x + yi \mid x = 0\}$, $f(B) = \{x + yi \mid x^2 + y^2 = 2 \text{ e } y \geq x\}$;
f) $f(A) = \{x + yi \mid x = 0 \text{ e } y \geq 0\}$, $f(B) = \{x + yi \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

7.31) $x = (2k+1)\pi/3$ ou $x = (2k+1)\pi/2$, $(k \in \mathbb{Z})$.

7.33) $2^{n/2} \cos n\pi/4$.

7.34) a) $s_0 = (2^n + 2\cos n\pi/3)$;
b) $s_1 = (2^n - \cos n\pi/3 + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, n\pi/3)/3$;
c) $s_2 = (2^n - \cos n\pi/3 - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, n\pi/3)/3$.

7.35) a) $s_1 = \frac{\cos(a-r/2)-\cos(a+nr+r/2)}{2\,\mathrm{sen}\, r/2}$;
b) $s_1 = \frac{\mathrm{sen}(a+nr+r/2)-\mathrm{sen}(a-r/2)}{2\,\mathrm{sen}\, r/2}$.

7.37) $x = 2\cos 20^\circ \simeq 1{,}879$.

7.38) a) 1; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Referências

[1] "Geometria Euclidiana Plana". João Lucas Marques Barbosa, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1985.

[2] "Medida e Forma em Geometria". Elon Lages Lima, IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, 1991.

[3] "Meu Professor de Matemática e Outras Histórias". Elon Lages Lima, IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, 1991.